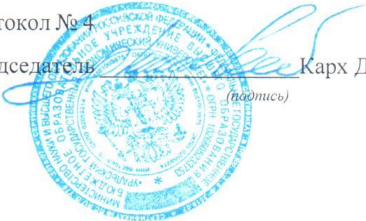


Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Силин Яков Петрович  
Должность: Ректор  
Дата подписания: 02.10.2024 08:45:05  
Уникальный программный ключ:  
24f866be2aca16484036a8cbb3c509a9531e605f

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФГБОУ ВО «Уральский государственный экономический университет»  
Одобрено  
на заседании кафедры  
29.11.2024 г.  
протокол № 11  
И.о. зав. кафедрой Панов М.А.

Утверждена  
Советом по учебно-методическим  
вопросам и качеству образования  
18 декабря 2024 г.  
протокол № 4  
Председатель (подпись) Карх Д.А.



РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

|                                             |                                                   |
|---------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| Наименование дисциплины                     | Алгоритмы и вычислительные методы оптимизации     |
| Направление подготовки                      | 09.03.01 Информатика и вычислительная техника     |
| Профиль                                     | Программное обеспечение автоматизированных систем |
| Форма обучения                              | очно-заочная                                      |
| Год набора                                  | 2025                                              |
| Разработана:<br>Доцент, PhD<br>Кольева Н.С. |                                                   |

Екатеринбург  
2024 г.

## **СОДЕРЖАНИЕ**

|                                                                                                                                                                                                                                                |           |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>ВВЕДЕНИЕ</b>                                                                                                                                                                                                                                | <b>3</b>  |
| <b>1. ЦЕЛЬ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ</b>                                                                                                                                                                                                             | <b>3</b>  |
| <b>2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП</b>                                                                                                                                                                                                    | <b>3</b>  |
| <b>3. ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ</b>                                                                                                                                                                                                                     | <b>3</b>  |
| <b>4. ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОСВОЕНИЯ ОПОП</b>                                                                                                                                                                                                 | <b>3</b>  |
| <b>5. ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН</b>                                                                                                                                                                                                                    | <b>5</b>  |
| <b>6. ФОРМЫ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ<br/>ШКАЛЫ ОЦЕНИВАНИЯ</b>                                                                                                                                                              | <b>5</b>  |
| <b>7. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ</b>                                                                                                                                                                                                                | <b>7</b>  |
| <b>8. ОСОБЕННОСТИ ОРГАНИЗАЦИИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО<br/>ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ ДЛЯ ЛИЦ С<br/>ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ЗДОРОВЬЯ</b>                                                                                                               | <b>10</b> |
| <b>9. ПЕРЕЧЕНЬ ОСНОВНОЙ И ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ УЧЕБНОЙ<br/>ЛИТЕРАТУРЫ, НЕОБХОДИМОЙ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ</b>                                                                                                                                       | <b>10</b> |
| <b>10. ПЕРЕЧЕНЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, ВКЛЮЧАЯ<br/>ПЕРЕЧЕНЬ ЛИЦЕНЗИОННОГО ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ<br/>ИНФОРМАЦИОННЫХ СПРАВОЧНЫХ СИСТЕМ, ОНЛАЙН<br/>КУРСОВ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ПРИ ОСУЩЕСТВЛЕНИИ<br/>ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ</b> | <b>11</b> |
| <b>11. ОПИСАНИЕ МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЙ БАЗЫ, НЕОБХОДИМОЙ ДЛЯ<br/>ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ</b>                                                                                                                    | <b>12</b> |

## ВВЕДЕНИЕ

Рабочая программа дисциплины является частью основной профессиональной образовательной программы высшего образования - программы бакалавриата, разработанной в соответствии с ФГОС ВО

|         |                                                                                                                                                                       |
|---------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ФГОС ВО | Федеральный государственный образовательный стандарт высшего образования- бакалавриат по направлению подготовки 09.03.01 Информатика и вычислительная техника (приказ |
| ПС      |                                                                                                                                                                       |

### 1. ЦЕЛЬ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Цель дисциплины: изучение основ теории оптимизации, знакомство с методами и способами нахождения решений различных задач

### 2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП

Дисциплина относится к вариативной части учебного плана.

### 3. ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ

| Промежуточная аттестация    | Часов            |                                |        |              |                                                                      | 3. е. |
|-----------------------------|------------------|--------------------------------|--------|--------------|----------------------------------------------------------------------|-------|
|                             | Всего за семестр | Контактная работа .(поуч.зан.) |        |              | Самостоятельная работа в том числе подготовка контрольных и курсовых |       |
|                             |                  | Всего                          | Лекции | Лабораторные |                                                                      |       |
| Семестр 6                   |                  |                                |        |              |                                                                      |       |
|                             | 36               | 4                              | 4      | 0            | 32                                                                   | 1     |
| Семестр 7                   |                  |                                |        |              |                                                                      |       |
| Экзамен, Контрольная работа | 144              | 16                             | 8      | 8            | 119                                                                  | 4     |
|                             | 180              | 20                             | 12     | 8            | 151                                                                  | 5     |

### 4. ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОСВОЕНИЯ ОПОП

В результате освоения ОПОП у выпускника должны быть сформированы компетенции, установленные в соответствии ФГОС ВО.

| Шифр и наименование компетенции                            | Индикаторы достижения компетенций                                                                                                                                                                                                                                         |
|------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| проектный                                                  |                                                                                                                                                                                                                                                                           |
| ПК-3 Проектирование компьютерного программного обеспечения | ИД-1.ПК-3 Знать: Принципы построения архитектуры программного обеспечения и виды архитектуры программного обеспечения; Типовые решения, библиотеки программных модулей, шаблоны, классы объектов, используемые при разработке программного обеспечения; Методы и средства |

|                                                                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|-----------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>П К - 3</p> <p>Проектирование компьютерного программного обеспечения</p> | <p>ИД-2.ПК-3 Уметь: Использовать существующие типовые решения и шаблоны проектирования программного обеспечения; Применять методы и средства проектирования программного обеспечения, структур данных, баз данных, программных интерфейсов; Осуществлять</p> <p>ИД-3.ПК-3 Иметь практический опыт: разработки, изменения и согласования архитектуры программного обеспечения с системным аналитиком и архитектором программного обеспечения; Проектирование структур данных; Проектирование баз данных; Проектирование программных интерфейсов; Оценка и согласование сроков выполнения поставленных задач</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| <p>организационно-управленческий</p>                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| <p>ПК-4 Анализ и формализация требований к информационным ресурсам</p>      | <p>ИД-1.ПК-4 Знать: Сетевые протоколы и основы web-технологий; Устройство и функционирование современных информационных ресурсов; Современные стандарты взаимодействия компонентов распределенных приложений; Программные средства и платформы для разработки web-ресурсов; Методики описания и моделирования процессов, средства моделирования процессов; Отраслевая нормативная техническая документация; Основы теории системного анализа и</p> <p>ИД-2.ПК-4 Уметь: Производить анализ исполнения требований; Вырабатывать варианты реализации требований; Производить оценку и обоснование рекомендуемых решений; Применять методы и приемы формализации задач; Использовать программные продукты для графического отображения алгоритмов; Осуществлять коммуникации</p> <p>ИД-3.ПК-4 Иметь практический опыт: проведения интервьюирования заказчика в соответствии с готовой методологией; Составления формализованных описаний решений поставленных задач в соответствии с требованиями принятых в организации нормативных документов; Разработки алгоритмов решения поставленных задач в соответствии с требованиями принятых в организации нормативных документов; Согласование требований к ИР с заинтересованными сторонами; Оценка времени и</p> |
| <p>ПК-6 Проектирование информационных ресурсов</p>                          | <p>ИД-1.ПК-6 Знать: Принципы построения архитектуры ИР; Типовые решения, библиотеки программных модулей, шаблоны, классы объектов, используемые при разработке ИР; Методы и средства проектирования ИР; Методы и средства проектирования баз данных; Методы и средства проектирования программных интерфейсов</p> <p>ИД-2.ПК-6 Уметь: Использовать существующие типовые решения и шаблоны ИР; Применять методы и средства проектирования ИР, структур данных, баз данных, программных интерфейсов; Осуществлять коммуникации с заинтересованными сторонами</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |

|                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|---------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| П К - 6<br>Проектирование информационных ресурсов | ИД-3.ПК-6 Иметь практический опыт: разработки, изменения архитектуры ИР, согласование с системным аналитиком и архитектором; Проектирования структур данных; Проектирования баз данных; Проектирования интерфейсов; Оценки и согласования сроков выполнения поставленных задач |
|---------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

## 5. ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН

| Тема      | Часов                                                                    | Все го часов | Контактная работа (по уч.зан.) |              |                      | Самост. работа | Контроль самостоятельной работы |
|-----------|--------------------------------------------------------------------------|--------------|--------------------------------|--------------|----------------------|----------------|---------------------------------|
|           | Наименование темы                                                        |              | Лекции                         | Лабораторные | Практические занятия |                |                                 |
| Семестр 6 |                                                                          | 36           |                                |              |                      |                |                                 |
| Тема 1.   | Введение. Обзор математических моделей и методов оптимизации (ПК 2)      | 36           | 4                              |              |                      | 32             |                                 |
| Семестр 7 |                                                                          | 135          |                                |              |                      |                |                                 |
| Тема 2.   | Линейные оптимизационные модели или линейное программирование            | 24           | 2                              | 2            |                      | 20             |                                 |
| Тема 3.   | Задачи, сводящиеся к линейному программированию (ПК 4)                   | 28           | 1                              | 2            |                      | 25             |                                 |
| Тема 4.   | Модели и методы целочисленного линейного программирования                | 29           | 1                              | 2            |                      | 26             |                                 |
| Тема 5.   | Нелинейные оптимизационные модели или нелинейное программирование (ПК 6) | 29           | 2                              | 1            |                      | 26             |                                 |
| Тема 6.   | Принятие решений в условиях неопределенности                             | 25           | 2                              | 1            |                      | 22             |                                 |

## 6. ФОРМЫ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ШКАЛЫ ОЦЕНИВАНИЯ

| Раздел/Тема                             | Вид оценочного средства | Описание оценочного средства                                                                | Критерии оценивания                                                     |
|-----------------------------------------|-------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|
| Текущий контроль (Приложение 4)         |                         |                                                                                             |                                                                         |
| Темы 1-2                                | Контрольная работа      | Контрольная работа №1 содержит 2 задания                                                    | 100 баллов                                                              |
| Темы 3-4                                | Контрольная работа      | Контрольная работа №2 содержит 2 задания                                                    | 100 баллов                                                              |
| Темы 5-6                                | Контрольная работа      | Контрольная работа №3 содержит 4 задания                                                    | 100 баллов                                                              |
| Промежуточная аттестация (Приложение 5) |                         |                                                                                             |                                                                         |
| 7 семестр (Эк)                          | Экзаменационный билет   | Экзаменационный билет состоит из 2-х теоретических вопросов и одного практического задания. | Теоретические вопросы - по 25 баллов, практическое задание - 50 баллов. |

## **ОПИСАНИЕ ШКАЛ ОЦЕНИВАНИЯ**

Показатель оценки освоения ОПОП формируется на основе объединения текущего контроля и промежуточной аттестации обучающегося.

Показатель рейтинга по каждой дисциплине выражается в процентах, который показывает уровень подготовки студента.

Текущий контроль. Используется 100-балльная система оценивания. Оценка работы студента в течение семестра осуществляется преподавателем в соответствии с разработанной им системой оценки учебных достижений в процессе обучения по данной дисциплине.

В рабочих программах дисциплин и практик закреплены виды текущего контроля, планируемые результаты контрольных мероприятий и критерии оценки учебных достижений.

В течение семестра преподавателем проводится не менее 3-х контрольных мероприятий, по оценке деятельности студента. Если посещения занятий по дисциплине включены в рейтинг, то данный показатель составляет не более 20% от максимального количества баллов по дисциплине.

Промежуточная аттестация. Используется 5-балльная система оценивания. Оценка работы студента по окончании дисциплины (части дисциплины) осуществляется преподавателем в соответствии с разработанной им системой оценки достижений студента в процессе обучения по данной дисциплине. Промежуточная аттестация также проводится по окончании формирования компетенций.

Порядок перевода рейтинга, предусмотренных системой оценивания, по дисциплине, в пятибалльную систему.

Высокий уровень – 100% - 70% - отлично, хорошо.

Средний уровень – 69% - 50% - удовлетворительно.

| Показатель оценки | По 5-балльной системе | Характеристика показателя                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|-------------------|-----------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 100% - 85%        | отлично               | обладают теоретическими знаниями в полном объеме, понимают, самостоятельно умеют применять, исследовать, идентифицировать, анализировать, систематизировать, распределять по категориям, рассчитать показатели, классифицировать, разрабатывать модели, алгоритмизировать, управлять, организовать, планировать процессы исследования, осуществлять оценку результатов на высоком уровне                                                                                             |
| 84% - 70%         | хорошо                | обладают теоретическими знаниями в полном объеме, понимают, самостоятельно умеют применять, исследовать, идентифицировать, анализировать, систематизировать, распределять по категориям, рассчитать показатели, классифицировать, разрабатывать модели, алгоритмизировать, управлять, организовать, планировать процессы исследования, осуществлять оценку результатов.<br><br>Могут быть допущены недочеты, исправленные студентом самостоятельно в процессе работы (ответа и т.д.) |
| 69% - 50%         | удовлетворительно     | обладают общими теоретическими знаниями, умеют применять, исследовать, идентифицировать, анализировать, систематизировать, распределять по категориям, рассчитать показатели, классифицировать, разрабатывать модели, алгоритмизировать, управлять, организовать, планировать процессы исследования, осуществлять оценку результатов на среднем уровне. Допускаются ошибки, которые студент затрудняется исправить самостоятельно.                                                   |
| 49 % и менее      | неудовлетворительно   | обладают не полным объемом общих теоретических знаниями, не умеют самостоятельно применять, исследовать, идентифицировать, анализировать, систематизировать, распределять по категориям, рассчитать показатели, классифицировать, разрабатывать модели, алгоритмизировать, управлять, организовать, планировать процессы исследования, осуществлять оценку результатов.<br>Не сформированы умения и навыки для                                                                       |
| 100% - 50%        | зачтено               | характеристика показателя соответствует «отлично», «хорошо», «удовлетворительно»                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| 49 % и менее      | не зачтено            | характеристика показателя соответствует «неудовлетворительно»                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |

## 7. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

### 7.1. Содержание лекций

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Тема 1. Введение. Обзор математических моделей и методов оптимизации (ПК-3)</p> <p>Начальные сведения о задачах оптимизации: постановка и классификация задач, существование оптимального решения. Понятия о методах оптимизации. Классификация методов оптимизации. Примеры задач из области оптимизации.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| <p>Тема 2. Линейные оптимизационные модели и линейное программирование</p> <p>Задачи линейного программирования (ЛП), их особенности, место и роль в системных оптимизационных математических моделях. Примеры: задачи о раскрое материалов, планировании производства, о диете, и другие. Графический метод решения задачи ЛП.</p> <p>Общая постановка и различные формы задачи ЛП. Геометрия задач ЛП. Задачи транспортного типа (ТЗ) и сводящиеся к ним. Общие свойства транспортных задач. Построение допустимого решения ТЗ (методы северо-западного угла и наименьшей стоимости). Транспортные задачи с запрещенными маршрутами. Задачи, сводящиеся к ТЗ или примыкающие к ним - задача о перевозках с промежуточной обработкой и распределительная задача. Теоремы двойственности. Анализ чувствительности оптимального решения к изменениям параметров задачи.</p> |
| <p>Тема 3. Задачи, сводящиеся к линейному программированию (ПК-4)</p> <p>Симплекс-метод решения задач линейного программирования. Двойственная задача линейного программирования. Алгоритм симплекс-метода решения общей задачи линейного программирования. Методы искусственного базиса. Реализация метода программными средствами.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| <p>Тема 4. Модели и методы целочисленного линейного программирования</p> <p>Целочисленное программирование. Постановка задачи целочисленного линейного программирования. Условие целочисленности многогранных множеств. Алгоритм Гомори. Метод ветвей и границ. Задача о потоке минимальной стоимости. Задача коммивояжера. Задача о покрытии.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| <p>Тема 5. Нелинейные оптимизационные модели и нелинейное программирование (ПК-6)</p> <p>Графическое решение задачи нелинейного программирования. Метод множителей Лагранжа. Решение задач выпуклого программирования</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
| <p>Тема 6. Принятие решений в условиях неопределенности</p> <p>Задачи оптимизации в условиях неопределенности. Виды неопределенности: вероятностная (статистическая), полная (неустраняемая, существенная), комбинированная. Принципы оптимальности (критерии выбора решений) в случае полной неопределенности – Вальда (гарантированного результата, максимина), Гурвица (пессимизма-оптимизма), Сэвиджа (минимаксного сожаления), Бернулли-Лапласа (недостаточного основания). Игры с природой.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |

## 7.2 Содержание практических занятий и лабораторных работ

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Тема 3. Задачи, сводящиеся к линейному программированию (ПК-4)</p> <p>Постановка транспортной задачи. Понятие открытой и закрытой транспортной задачи. Методы нахождения первого допустимого базисного решения. Метод потенциалов решения транспортной задачи.</p> <p>Задача о назначениях как транспортная модель. Модификации транспортных задач.</p> |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Тема 4. Модели и методы целочисленного линейного программирования</p> <p>Понятие о сетевых задачах. Постановка задачи минимизации сети для конечных сетей. Общая схемарешения задачи минимизации сети методом построения связных и несвязных множеств. Формализованный алгоритм решения задачи минимизации сети методом построения связных и несвязных множеств. Постановка задачи минимизации пути для конечных сетей. Общая схемарешения задачи минимизации пути для конечных сетей итерационным методом. Примеры экономических ситуаций применения метода.</p> |
| <p>Тема 5. Нелинейные оптимизационные модели и нелинейное программирование (ПК-6)</p> <p>Понятие о нелинейных оптимизационных моделях. Алгоритм Гомори. Метод ветвей и границ. Задача о потоке минимальной стоимости. Задача коммивояжера. Задача о покрытии. Алгоритм Гомори. Метод ветвей и границ. Задача о потоке минимальной стоимости. Задача коммивояжера. Задача о покрытии.</p>                                                                                                                                                                             |
| <p>Тема 6. Принятие решений в условиях неопределенности</p> <p>Использование методов оптимизации для решения задач теории оптимального управления и теории игр. Оптимальные чистые стратегии в условиях риска по критерию Байеса, Лапласа и Гермейера. Оптимальные чистые стратегии в условиях неопределенности по критериям пессимизма, оптимизма, Вальда, Гурвица и Сэвиджа.</p>                                                                                                                                                                                   |

### 7.3. Содержание самостоятельной работы

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Тема 2. Линейные оптимизационные модели и линейное программирование</p> <p>Симплекс-метод решения задач линейного программирования. Двойственная задача линейного программирования.</p> <p>Изучение основной и дополнительной литературы по теме. Разбор практических примеров. Выполнение практических работ. Подготовка к лабораторным занятиям.</p> |
| <p>Тема 3. Задачи, сводящиеся к линейному программированию (ПК-4)</p> <p>Изучение основной и дополнительной литературы по теме. Разбор практических примеров. Выполнение практических работ. Подготовка к лабораторным занятиям.</p>                                                                                                                      |
| <p>Тема 4. Модели и методы целочисленного линейного программирования</p> <p>Изучение основной и дополнительной литературы по теме. Разбор практических примеров. Выполнение практических работ. Подготовка к лабораторным занятиям.</p>                                                                                                                   |
| <p>Тема 5. Нелинейные оптимизационные модели и нелинейное программирование (ПК-6)</p> <p>Модели и методы целочисленного линейного программирования. Изучение основной и дополнительной литературы по теме. Разбор практических примеров. Выполнение практических работ. Подготовка к лабораторным занятиям.</p>                                           |
| <p>Тема 6. Принятие решений в условиях неопределенности</p> <p>Изучение основной и дополнительной литературы по теме. Разбор практических примеров. Выполнение практических работ. Подготовка к лабораторным занятиям.</p>                                                                                                                                |

7.3.1. Примерные вопросы для самостоятельной подготовки к зачету/экзамену  
Приложение 1.

7.3.2. Практические задания по дисциплине для самостоятельной подготовки к зачету/экзамену  
Приложение 2.

7.3.3. Перечень курсовых работ  
Не предусмотрено.

7.4. Электронное портфолио обучающегося  
Размещаются контрольные работы

7.5. Методические рекомендации по выполнению контрольной работы  
Приложение 6

7.6 Методические рекомендации по выполнению курсовой работы  
Не предусмотрено.

## **8. ОСОБЕННОСТИ ОРГАНИЗАЦИИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ ДЛЯ ЛИЦ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ЗДОРОВЬЯ**

### ***По заявлению студента***

В целях доступности освоения программы для лиц с ограниченными возможностями здоровья при необходимости кафедра обеспечивает следующие условия:

- особый порядок освоения дисциплины, с учетом состояния их здоровья;
- электронные образовательные ресурсы по дисциплине в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья;
- изучение дисциплины по индивидуальному учебному плану (вне зависимости от формы обучения);
- электронное обучение и дистанционные образовательные технологии, которые предусматривают возможности приема-передачи информации в доступных для них формах.
- доступ (удаленный доступ), к современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам, состав которых определен РПД.

## **9. ПЕРЕЧЕНЬ ОСНОВНОЙ И ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ, НЕОБХОДИМОЙ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ**

**Сайт библиотеки УрГЭУ**

<http://lib.usue.ru/>

### **Основная литература:**

2. Кремер Н. Ш., Путко Б. А., Тришин И. М., Фридман М. Н. Исследование операций в экономике [Электронный ресурс]: Учебник для вузов. - Москва: Юрайт, 2022. - 414 – Режим доступа: <https://urait.ru/bcode/488643>

3. Черняк А. А., Богданович С. А., Черняк Ж. А., Метельский Ю. М. Методы оптимизации: теория и алгоритмы [Электронный ресурс]: Учебное пособие для вузов. - Москва: Юрайт, 2022. - 357 – Режим доступа: <https://urait.ru/bcode/492428>

4. Андреев А. Е., Болотов А. А., Коляда К. В., Фролов А. Б. Дискретная математика: прикладные задачи и сложность алгоритмов [Электронный ресурс]: Учебник и практикум для вузов. - Москва: Юрайт, 2022. - 317 – Режим доступа: <https://urait.ru/bcode/492349>

5. Гвоздева В.А. Базовые и прикладные информационные технологии [Электронный ресурс]: Учебник. - Москва: Издательский Дом "ФОРУМ", 2023. - 383 – Режим доступа: <https://znanium.com/catalog/product/1893910>

6. Белов В. В., Чистякова В.И. Алгоритмы и структуры данных [Электронный ресурс]: Учебник. - Москва: ООО "КУРС", 2023. - 240 – Режим доступа: <https://znanium.com/catalog/product/2110058>

7. Дадян Э.Г., Зеленков Ю.А. Методы, модели, средства хранения и обработки данных [Электронный ресурс]: Учебник. - Москва: Вузовский учебник, 2024. - 168 – Режим доступа: <https://znanium.com/catalog/product/2122966>

8. Григорьев А.А., Исаев Е.А. Методы и алгоритмы обработки данных [Электронный ресурс]: Учебное пособие. - Москва: ООО "Научно-издательский центр ИНФРА-М", 2024. - 383 – Режим доступа: <https://znanium.com/catalog/product/2084190>

9. Гданский Н.И. Основы теории и алгоритмы на графах [Электронный ресурс]: Учебное пособие. - Москва: ООО "Научно-издательский центр ИНФРА-М", 2025. - 206 – Режим доступа: <https://znanium.com/catalog/product/2166200>

#### **Дополнительная литература:**

2. Кислицын Е. В. Алгоритмы и структуры данных [Электронный ресурс]: учебное пособие. - Екатеринбург: Издательство УрГЭУ, 2020. - 281 – Режим доступа: <http://lib.usue.ru/resource/limit/ump/20/p493245.pdf>

3. Панюков А. В. Математическое моделирование экономических процессов: учебное пособие для студентов вузов. - Москва: URSS: [ЛЕНАНД], 2015. - 191

4. Волгина О. А., Голодная Н. Ю., Одияко Н. Н., Шуман Г. И. Математическое моделирование экономических процессов и систем: учебное пособие для студентов, обучающихся по специальностям "Мировая экономика", "Финансы и кредит", "Бухгалтерский учет, анализ и аудит". - Москва: КноРус, 2016. - 196

5. Дорогов В.Г., Теплова Я.О. Введение в методы и алгоритмы принятия решений [Электронный ресурс]: Учебное пособие. - Москва: Издательский Дом "ФОРУМ", 2022. - 240 – Режим доступа: <https://znanium.com/catalog/product/1841773>

### **10. ПЕРЕЧЕНЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, ВКЛЮЧАЯ ПЕРЕЧЕНЬ ЛИЦЕНЗИОННОГО ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ И ИНФОРМАЦИОННЫХ СПРАВОЧНЫХ СИСТЕМ, ОНЛАЙН КУРСОВ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ПРИ ОСУЩЕСТВЛЕНИИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ**

#### **Перечень лицензионного программного обеспечения:**

Microsoft Windows 10 .Договор № 52/223-ПО/2020 от 13.04.2020, Акт № Tr000523459 от 14.10.2020. Срок действия лицензии - Без ограничения срока.

Microsoft Office 2016. Договор № 52/223-ПО/2020 от 13.04.2020, Акт № Tr000523459 от 14.10.2020 Срок действия лицензии - Без ограничения срока.

**Перечень информационных справочных систем, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:**

Справочно-правовая система Гарант. Договор № 58419 от 22 декабря 2015. Срок действия лицензии -без ограничения срока

Справочно-правовая система Консультант +. Срок действия лицензии до 31.12.2025

**11. ОПИСАНИЕ МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЙ БАЗЫ, НЕОБХОДИМОЙ ДЛЯ ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ**

Реализация учебной дисциплины осуществляется с использованием материально-технической базы УрГЭУ, обеспечивающей проведение всех видов учебных занятий и научно-исследовательской и самостоятельной работы обучающихся:

Специальные помещения представляют собой учебные аудитории для проведения всех видов занятий, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду УрГЭУ.

Все помещения укомплектованы специализированной мебелью и оснащены мультимедийным оборудованием спецоборудованием (информационно-телекоммуникационным, иным компьютерным), доступом к информационно-поисковым, справочно-правовым системам, электронным библиотечным системам, базам данных действующего законодательства, иным информационным ресурсам служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Для проведения занятий лекционного типа презентации и другие учебно-наглядные пособия, обеспечивающие тематические иллюстрации.

### 7.3.1. Примерные вопросы для самостоятельной подготовки к экзамену/зачету

#### К экзамену

1. Основные этапы оптимизации управленческого решения с помощью математических методов
2. Постановка задачи линейного программирования
3. Основные теоремы линейного программирования
4. Геометрическое решение задачи линейного программирования
5. Исторические этапы исследований транспортной задачи
6. Основные постановки транспортной задачи
7. Критерии оптимизации транспортной задачи.
8. Содержательная постановка транспортной задачи.
9. Построение транспортной таблицы.
10. Модель открытой транспортной задачи
11. Модель закрытой транспортной задачи
12. Этапы решения транспортной задачи
13. Метод северо-западного угла
14. Метод минимального тарифа
15. Метод потенциалов, его экономический смысл
16. Постановка задачи минимизации сети для конечных сетей.
17. Общая схема решения задачи минимизации сети методом построения связных и несвязных множеств.
18. Постановка задачи минимизации пути для конечных сетей.
19. Общая схема решения задачи минимизации пути для конечных сетей итерационным методом.
20. Алгоритм решения задачи минимизации пути для конечных сетей общего вида.
21. Основные понятия и задачи метода сетевого планирования и управления (СПУ).
22. Структурное планирование или сетевое представление проектов (программ). Основные правила построения сетевой модели.
23. Расчет сетевой модели. Постановка задачи определения критического пути.
24. Алгоритм определения критического пути и критического времени в сетевой модели проекта в методе СПУ.
25. Определение резервов времени работ и событий в методе СПУ.
26. Общая схема построения календарного графика выполнения работ в методе СПУ.
27. Понятие риска в теории игр
28. Понятие «игры с природой»
29. Критерий Вальда, критерий оптимизма, критерий пессимизма
30. Критерий Сэвиджа, критерий Гурвица
31. Критерий Байеса
32. Критерий Лапласа
33. Критерий Гермейера

### 7.3.2. Практические задания по дисциплине для самостоятельной подготовки к экзамену

1. Задания по теме «Графический метод решения задач линейного программирования».

а) Найти  $F = 2x_1 - x_2 \rightarrow \min$  при ограничениях

$$\{x_1 + x_2 \geq 4, \mid \{2x_1 - x_2 \geq 2, \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

2. Задания по теме «Симплекс-метод метод решения задач линейного программирования».

а) Найти  $F = x_1 - x_2 - 3x_3 \rightarrow \min$  при ограничениях

$$2x_1 - x_2 + x_3 \leq 1,$$

$$4x_1 - 2x_2 + x_3 \geq -2,$$

$$3x_1 + x_3 \leq 5$$

$$\text{все } x_i \geq 0.$$

3. Для данной задачи ЛП составить каноническую форму и решить симплексную таблицу.

$$-x_4 + x_5 \rightarrow \max$$

$$x_1 + x_4 - 2x_5 \geq 1$$

$$x_2 - 2x_4 + x_5 = 2$$

$$x_3 + 3x_4 + x_5 \leq 3$$

$$x_i \geq 0, i = \overline{1, 5}$$

4. Для данной задачи ЛП составить каноническую форму и решить симплексную таблицу.

$$2x_3 - x_4 \rightarrow \min$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \leq 4$$

$$x_2 - 3x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \geq 15$$

$$x_i \geq 0, i = \overline{1, 4}$$

5. Задания по теме «Симплекс-метод метод решения задач линейного программирования».

Найти  $F = 3x_1 + 4x_2 + x_3 \rightarrow \max$  при ограничениях

$$x_1 - 2x_2 - 3x_3 \leq 5,$$

$$2x_1 - 3x_2 - 5x_3 \leq 8,$$

$$3x_1 - x_2 - 2x_3 \leq 6,$$

$$\text{все } x_i \geq 0.$$

6. Решить задачу ЛП симплексным методом, а также с применением любого ПО (MS Excel, Mathcad)

$$\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 + 4x_4 &\rightarrow \max \\
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 &= 18 \\
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &\leq 12 \\
2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 &\geq 1 \\
x_i &\geq 0, i = \overline{1,4}
\end{aligned}$$

7. Решить задачу ЛП симплексным методом, а также с применением любого ПО (MS Excel, Mathcad)

$$\begin{aligned}
-4x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &\rightarrow \max \\
x_1 + x_2 + 2x_4 &\leq 9 \\
2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 7 \\
2x_1 - 3x_2 + x_3 &\geq 4 \\
x_i &\geq 0, i = \overline{1,4}
\end{aligned}$$

8. Решить задачу, используя правило северо-западного угла.

$$\begin{array}{ll}
1) a_1=200 & b_2=130 \\
a_2=175 & b_3=80 \\
a_3=225 & b_4=190 \\
b_1=100 & b_5=100
\end{array}
\quad D = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 4 & 2 & 5 \\ 7 & 1 & 3 & 1 & 10 \\ 2 & 3 & 6 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

Приняты следующие обозначения:

a – вектор объемов запасов;

b – вектор потребностей;

D – матрица тарифов перевозок

9. Решить задачу, используя правило минимальной стоимости (минимального элемента);

$$\begin{array}{ll}
1) a_1=200 & b_2=130 \\
a_2=175 & b_3=80 \\
a_3=225 & b_4=190 \\
b_1=100 & b_5=100
\end{array}
\quad D = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 4 & 2 & 5 \\ 7 & 1 & 3 & 1 & 10 \\ 2 & 3 & 6 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

Приняты следующие обозначения:

a – вектор объемов запасов;

b – вектор потребностей;

D – матрица тарифов перевозок

10. Решить задачу, используя метод потенциалов

$$\begin{array}{ll}
1) a_1=200 & b_2=130 \\
a_2=175 & b_3=80 \\
a_3=225 & b_4=190 \\
b_1=100 & b_5=100
\end{array}
\quad D = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 4 & 2 & 5 \\ 7 & 1 & 3 & 1 & 10 \\ 2 & 3 & 6 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

Приняты следующие обозначения:

a – вектор объемов запасов;

$b$  – вектор потребностей;  
 $D$  – матрица тарифов перевозок

**11. Решить задачу, используя венгерский метод**

$$\begin{aligned} 1) \quad & a_1 = 200 & b_2 &= 130 \\ & a_2 = 175 & b_3 &= 80 \\ & a_3 = 225 & b_4 &= 190 \\ & b_1 &= 100 & b_5 &= 100 \end{aligned}$$

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 4 & 2 & 5 \\ 7 & 1 & 3 & 1 & 10 \\ 2 & 3 & 6 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

Приняты следующие обозначения:

$a$  – вектор объемов запасов;  
 $b$  – вектор потребностей;  
 $D$  – матрица тарифов перевозок

**12. Решить транспортную задачу, заданную распределительной таблицей, используя метод потенциалов.**

13. Решить

| $b_j$       | $b_1 = 100$ | $b_2 = 50$ | $b_3 = 150$ | $b_4 = 100$ |
|-------------|-------------|------------|-------------|-------------|
| $a_i = 200$ | 5           | 1          | 3           | 4           |
| $a_i = 170$ | 2           | 3          | 4           | 2           |
| $a_i = 50$  | 8           | 5          | 1           | 6           |

задачу

коммивояжера методом ветвей и границ

|   | 1        | 2        | 3        | 4        | 5        |
|---|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1 | $\infty$ | 10       | 6        | 8        | 15       |
| 2 | 10       | $\infty$ | 18       | 12       | 26       |
| 3 | 6        | 18       | $\infty$ | 14       | 18       |
| 4 | 8        | 12       | 14       | $\infty$ | 16       |
| 5 | 15       | 26       | 18       | 16       | $\infty$ |

**14. Задания по теме «Метод сетевого планирования и управления».**

Постройте сетевую модель проекта.

Экономический факультет МГУ разрабатывает новую программу для повышения квалификации преподавателей, обучающихся количественным методам анализа экономики. Желательно, чтобы эту программу можно было реализовать в наиболее сжатые сроки. Имеются существенные взаимосвязи между дисциплинами, которые необходимо отразить, составляя расписание занятий. Дисциплины и их взаимосвязь указаны в таблице:

| Дисциплина | Непосредственно предшествующие дисциплины | Время изучения, дни |
|------------|-------------------------------------------|---------------------|
| A          | –                                         | 4                   |
| B          | –                                         | 6                   |
| C          | A                                         | 2                   |

| Дисциплина | Непосредственно<br>предшествующие дисциплины | Время<br>изучения, дни |
|------------|----------------------------------------------|------------------------|
| D          | A                                            | 6                      |
| E          | C, B                                         | 3                      |
| F          | C, B                                         | 3                      |
| G          | D, E                                         | 5                      |

Рассчитайте временные параметры событий и определите длину критического пути.

**15. Задание по теме «Использование методов оптимизации для решения задач Теории оптимального управления и Теории игр.»**

Решить матричную игру с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 1 \\ 3 & 8 & 5 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 3 \\ 7 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

итерационным методом Брауна-Робинсон, сделав 15-20 итераций. Результаты вычислений оформить в Excel, в следующей таблице:

| № итерации | Чист. стратегия игрока A | Накопленные проигрыши игрока B при |     |       | Миним. средний проигрыш игрока B | Чист. стратегия игрока B | Накопленные выигрыши игрока A при |     |       | Макс. средний выигрыш игрока A | Цена игры |
|------------|--------------------------|------------------------------------|-----|-------|----------------------------------|--------------------------|-----------------------------------|-----|-------|--------------------------------|-----------|
|            |                          | $B_1$                              | ... | $B_n$ |                                  |                          | $A_1$                             | ... | $A_m$ |                                |           |
| 2          |                          |                                    |     |       |                                  |                          |                                   |     |       |                                |           |
| 3          |                          |                                    |     |       |                                  |                          |                                   |     |       |                                |           |
| ...        |                          |                                    |     |       |                                  |                          |                                   |     |       |                                |           |

Далее указать получившиеся приближенно оптимальные смешанные стратегии игроков и цену игры.

Найти решение игры с той же матрицей A, используя симплекс-метод. Сравнить результаты.

### Примерные вопросы закрытого типа (ПК-3)

1. Какой из перечисленных методов является итерационным методом оптимизации?

- A) Метод Гаусса
- B) Метод Ньютона
- C) Метод градиентного спуска
- D) Метод Монте-Карло

Ответ: C) Метод градиентного спуска

2. Какой из перечисленных алгоритмов используется для решения задачи коммивояжера?

- A) Алгоритм Дейкстры

- В) Генетический алгоритм
- С) Метод симплекс-метод
- Д) Алгоритм Бroyдена-Флетчера-Гольдфарба-Шанно

*Ответ: В) Генетический алгоритм*

3. Какой из перечисленных методов является методом оптимизации безусловной оптимизации?

- А) Метод Лагранжа
- В) Метод штрафных функций
- С) Метод симплекс-метод
- Д) Метод Бroyдена-Флетчера-Гольдфарба-Шанно

*Ответ: Д) Метод Бroyдена-Флетчера-Гольдфарба-Шанно*

4. Какой из перечисленных методов используется для решения задачи линейного программирования?

- А) Метод Гаусса
- В) Метод Ньютона
- С) Метод симплекс-метод
- Д) Метод градиентного спуска

*Ответ: С) Метод симплекс-метод*

5. Какой из перечисленных алгоритмов является эвристическим методом оптимизации?

- А) Метод Гаусса
- В) Метод Ньютона
- С) Генетический алгоритм
- Д) Метод Лагранжа

*Ответ: С) Генетический алгоритм*

#### **Примерные вопросы открытого типа (ПК-4,6)**

1. Какие методы оптимизации вы считаете наиболее эффективными для решения задачи оптимизации в вашей области интересов и почему?
2. Как вы определяете критерии оптимальности при выборе алгоритма оптимизации для конкретной задачи?
3. Какие проблемы и вызовы вы сталкивались при применении алгоритмов оптимизации на практике и какие решения были найдены?
4. Как вы оцениваете важность баланса между скоростью сходимости и точностью решения при выборе метода оптимизации?
5. Какие факторы влияют на выбор между локальными и глобальными методами оптимизации для конкретной задачи и какие преимущества и недостатки у каждого из них?

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

**УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**

УТВЕРЖДЕНЫ

на заседании кафедры информационных  
технологий и статистики

**МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ**

**КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ**

**по дисциплине**

**АЛГОРИТМЫ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ**

Прежде чем приступить к выполнению контрольной работы необходимо ознакомиться с теоретическим материалом, а также изучить примеры решения задач, приведенные в методических указаниях. Студент должен выполнить свой вариант контрольной работы, который совпадает с фамилией, именем и отчеством студента. Каждый студент выполняет свой индивидуальный вариант, в противном случае работа возвращается. Работу следует сдать на проверку не позднее, чем за 3 дня до зачета/экзамена. Если какие-либо элементы контрольной работы выполнены неверно, то работа возвращается студенту для внесения исправлений. Если после доработки ошибки не будут устранены, то студент либо получает новое задание, либо вызывается на собеседование.

## ИНСТРУКЦИЯ

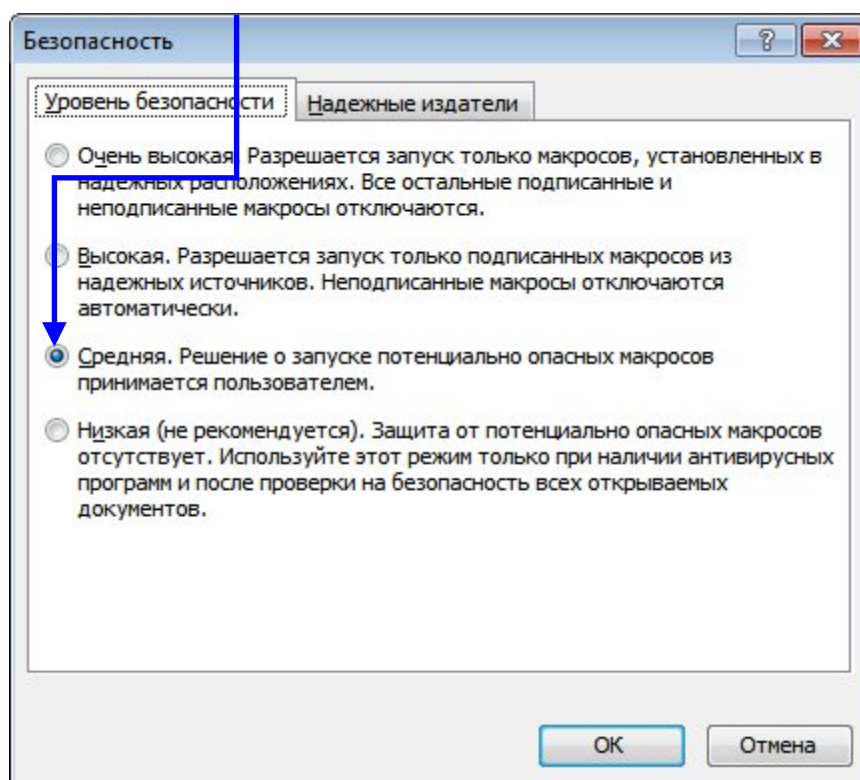
### по РАБОТЕ с КОНТРОЛЬНЫМИ ЗАДАНИЯМИ

#### *I. Если задание выполняется в Microsoft Excel 2003:*

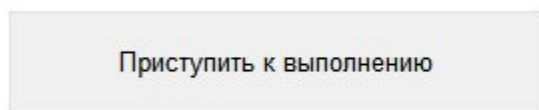
1. Загрузить Microsoft Excel 2003.
2. Последовательно зайти в пункты меню:

**Сервис → Макрос → Безопасность**

В появившемся окне диалога установить средний уровень безопасности:



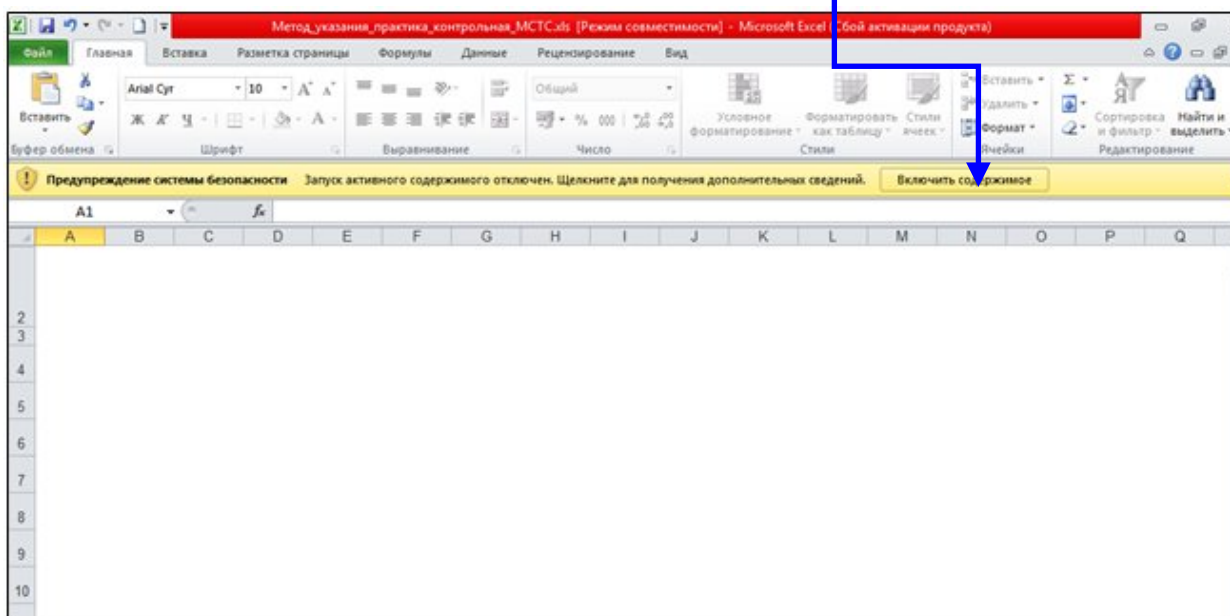
3. Загрузить требуемый файл.
4. Нажать кнопку:



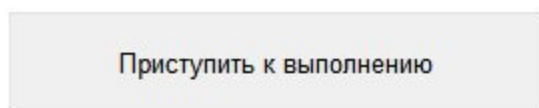
5. После нажатия указанной кнопки на экран выводятся листы с заданиями, которые необходимо выполнить.

## ***II. Если задание выполняется в Microsoft Excel 2007 (или 2010):***

1. Загрузить нужный файл в Microsoft Excel 2007 (2010).
2. Нажать кнопку «Включить содержимое»:



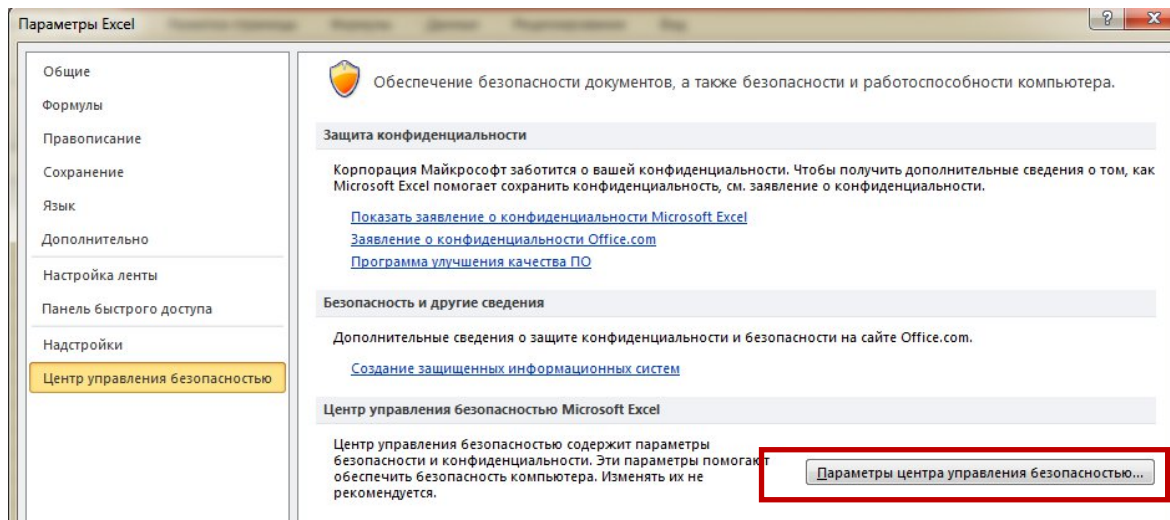
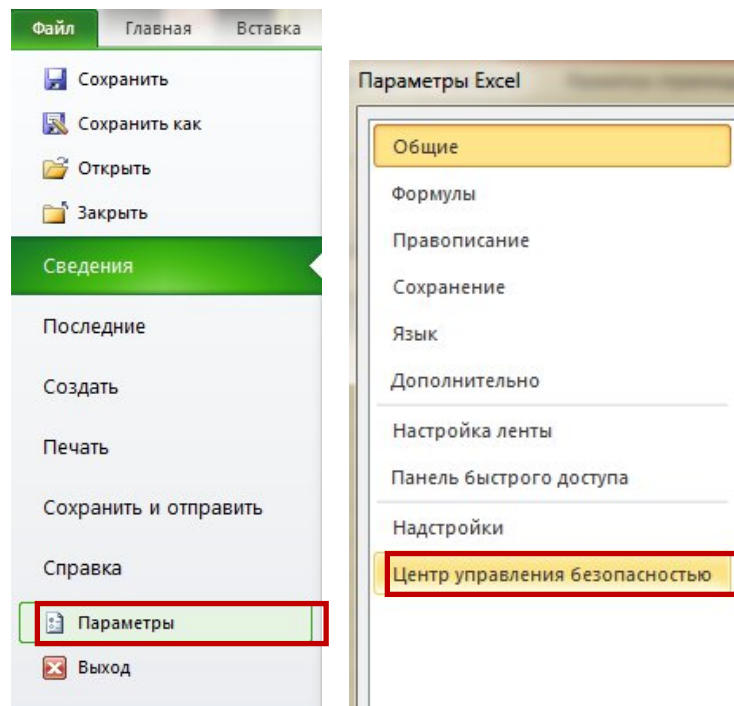
3. Нажать кнопку:

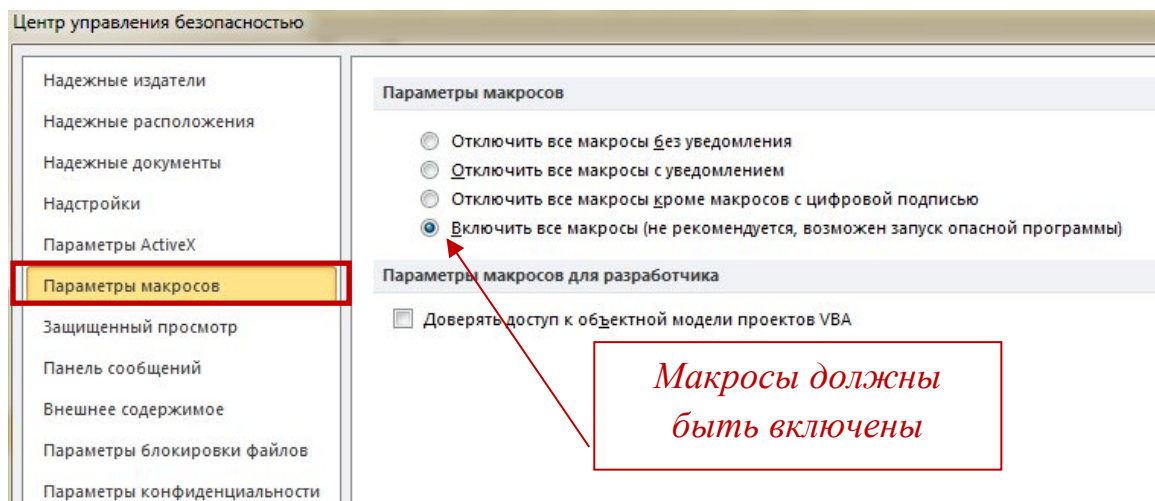


4. После нажатия указанной кнопки на экран выводятся листы с заданиями, которые необходимо выполнить.

## ***III. Перед загрузкой файлов с заданием нужно убедиться, что установлены требуемые параметры центра управления безопасностью:***

- загрузить Excel;
- по приведенной схеме убедиться, что макросы включены:





– далее загружаете файл с заданием.

### ***Структура экономико-математического исследования для оптимизационных моделей***

Рассмотрим задачу формирования оптимальной производственной программы по выпуску продукции в сверхурочное время.

Инструментальный цех завода имеет излишки ресурсов оборудования, которые могут быть использованы для выпуска восьми видов изделий. Для каждого вида изделий известна цена за единицу и себестоимость. Данные по трудоемкости изделий для каждого вида оборудования (нормы станкочасов), ресурсы времени в часах для каждого вида оборудования, цена за единицу изделия и себестоимость изготовления изделия заданы в табл. 1.

**Таблица 1**

| Оборудование                  | Виды изделий |    |    |    |    |    |    |    | Ресурс времени (час) |
|-------------------------------|--------------|----|----|----|----|----|----|----|----------------------|
|                               | 1            | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  |                      |
| ДИП - 300                     | 99           | 44 | 45 | 23 | 27 | 23 | 13 | 83 | 2200                 |
| ДИП - 500                     | 124          | 63 | 8  | 45 | 31 | 34 | 10 | 57 | 2300                 |
| карусельный                   | 95           | 52 | 0  | 40 | 0  | 0  | 0  | 88 | 1900                 |
| расточный                     | 84           | 23 | 18 | 8  | 9  | 11 | 4  | 47 | 1200                 |
| фрезерный                     | 68           | 9  | 15 | 8  | 14 | 13 | 13 | 57 | 2500                 |
| сверлильный                   | 51           | 67 | 8  | 18 | 8  | 18 | 9  | 66 | 2100                 |
| оптовая цена изделия, тыс.р.  | 55           | 39 | 46 | 75 | 56 | 49 | 36 | 12 |                      |
| себестоимость изделия, тыс.р. | 29           | 22 | 11 | 60 | 20 | 26 | 27 | 7  |                      |

Целью организации выпуска новой продукции является получение максимальной прибыли.

Процедура решения задачи предполагает выполнение шести последовательных этапов.

*1 этап. Выбор управляемых переменных.*

В качестве управляемых переменных выбираются те экономические показатели, которые позволяют записать все ограничения, а их численные значения дают ответ на вопрос, поставленный в задаче. В нашем случае организация выпуска предполагает определение объемов производства каждого из восьми видов продукции, поэтому в качестве управляемых переменных выбираются объемы выпуска продукции:

$x_i$  – объем выпуска  $i$ -того вида продукции,  $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ .

*2 этап. Анализ существенных ограничений.*

Учесть в математической модели все факторы, которые оказывают влияние на выпуск продукции, невозможно, более того, в этом нет необходимости. Следует учесть только те факторы, которые оказывают существенное влияние на принимаемые решения.

В оптимизационных моделях различают три типа ограничений:

- ограниченность имеющихся ресурсов;
- необходимость достижения экономическими показателями заранее заданных значений (плановые ограничения);
- технологические соотношения между группами управляемых переменных.

Согласно условию решаемой задачи, ограничен фонд времени работы станков. Поэтому в математическую модель вводятся шесть ресурсных ограничений (по количеству видов используемого оборудования).

*3 этап. Выбор целевой функции.*

В качестве целевой функции выбирается важнейший экономический показатель в условиях решаемой задачи. В некоторых случаях это максимизация прибыли предприятия, в том числе ее валютной составляющей, в некоторых – минимизация производственных затрат и т.п. В условиях мелкосерийного и индивидуального производства в качестве целевой функции можно использовать показатель загрузки оборудования, позволяющий сократить непроизводительные потери времени или показатель, позволяющий минимизировать остатки незавершенного производства и выровнять график выпуска изделий.

В рассматриваемой задаче таким показателем является прибыль. Критерий поиска целевой функции – максимизация.

*4 этап. Построение математической модели.*

На этом этапе все ограничения должны быть представлены в виде неравенств или уравнений относительно управляемых переменных. Цель задачи записывается в виде функции от управляемых переменных.

В решаемой задаче величина целевой функции  $Z$  определяется как суммарная прибыль от выпуска всех восьми изделий.

По условию задачи известна цена, по которой будет реализована каждая единица продукции и себестоимость ее выпуска, поэтому с учетом управляемых переменных можно записать выражение для общей прибыли, которую получит предприятие после реализации всех произведенных изделий. Прибыль будем рассматривать как разность оптовой цены и себестоимости.

В нашем случае,  $x_1$  – объем выпуска первого изделия, его цена – 55 (тыс. р.), а себестоимость составляет 29 тыс. р., прибыль единицы первой продукции составит 26 (55–29) тыс. р. Тогда  $26 \cdot x_1$  – это ожидаемая прибыль от реализации всех произведенных изделий первого вида. После того, как будет найдено численное значение управляемой переменной  $x_1$ , мы будем знать численное значение этой суммы.

Аналогично определяются ожидаемые значения прибыли, получаемые от реализации всех остальных изделий.

В результате можно записать математическое выражение для расчета общей прибыли  $Z$ , которую получит предприятие после реализации выпущенной продукции:

$$Z = 26 \cdot x_1 + 17 \cdot x_2 + 35 \cdot x_3 + 15 \cdot x_4 + 36 \cdot x_5 + 23 \cdot x_6 + 9 \cdot x_7 + 5 \cdot x_8 \rightarrow \max.$$

Неограниченный рост целевой функции невозможен, т.к. ограничены запасы ресурсов (фонд времени оборудования), которыми располагает предприятие. Для записи системы ограничений решаемой задачи следует записать неравенства по расходу имеющихся ресурсов.

Запишем выражение для расчета ожидаемых затрат фонда времени оборудования ДИП-300. По условию задачи на одну единицу первого изделия затрачивается 99 часов, тогда на весь ожидаемый выпуск первого изделия ( $x_1$ ) будет затрачено  $99 \cdot x_1$  часов. На все выпускаемые изделия второго вида будет затрачено  $44 \cdot x_2$  часов и т.п. Т.о. выражение для расчета ожидаемых затрат сырья имеет вид:

$$99 \cdot x_1 + 44 \cdot x_2 + 45 \cdot x_3 + 23 \cdot x_4 + 27 \cdot x_5 + 23 \cdot x_6 + 13 \cdot x_7 + 83 \cdot x_8.$$

Поскольку ожидаемые затраты времени не могут превысить заданный фонд времени оборудования ДИП-300, то:

$$99 \cdot x_1 + 44 \cdot x_2 + 45 \cdot x_3 + 23 \cdot x_4 + 27 \cdot x_5 + 23 \cdot x_6 + 13 \cdot x_7 + 83 \cdot x_8 \leq 2200.$$

Рассуждая аналогично, запишем ограничения по использованию фонда времени всех видов оборудования:

$$\begin{aligned}
99 \cdot x_1 + 44 \cdot x_2 + 45 \cdot x_3 + 23 \cdot x_4 + 27 \cdot x_5 + 23 \cdot x_6 + 13 \cdot x_7 + 83 \cdot x_8 &\leq 2200, \\
124 \cdot x_1 + 63 \cdot x_2 + 8 \cdot x_3 + 45 \cdot x_4 + 31 \cdot x_5 + 34 \cdot x_6 + 10 \cdot x_7 + 57 \cdot x_8 &\leq 2300, \\
95 \cdot x_1 + 52 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 40 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7 + 88 \cdot x_8 &\leq 1900, \\
84 \cdot x_1 + 23 \cdot x_2 + 18 \cdot x_3 + 8 \cdot x_4 + 9 \cdot x_5 + 11 \cdot x_6 + 4 \cdot x_7 + 47 \cdot x_8 &\leq 1200, \\
68 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2 + 15 \cdot x_3 + 8 \cdot x_4 + 14 \cdot x_5 + 13 \cdot x_6 + 13 \cdot x_7 + 57 \cdot x_8 &\leq 2500, \\
51 \cdot x_1 + 67 \cdot x_2 + 8 \cdot x_3 + 18 \cdot x_4 + 8 \cdot x_5 + 18 \cdot x_6 + 9 \cdot x_7 + 66 \cdot x_8 &\leq 2100.
\end{aligned}$$

Т.о. нами сформированы ресурсные ограничения задачи.

Анализ условия задачи позволяет сделать вывод об отсутствии ограничений второго и третьего типа – плановых и технологических.

В результате нами сформирована математическая модель задачи:

$$\begin{aligned}
Z = 26 \cdot x_1 + 17 \cdot x_2 + 35 \cdot x_3 + 15 \cdot x_4 + 36 \cdot x_5 + 23 \cdot x_6 + 9 \cdot x_7 + 5 \cdot x_8 &\rightarrow \max, \\
99 \cdot x_1 + 44 \cdot x_2 + 45 \cdot x_3 + 23 \cdot x_4 + 27 \cdot x_5 + 23 \cdot x_6 + 13 \cdot x_7 + 83 \cdot x_8 &\leq 2200, \\
124 \cdot x_1 + 63 \cdot x_2 + 8 \cdot x_3 + 45 \cdot x_4 + 31 \cdot x_5 + 34 \cdot x_6 + 10 \cdot x_7 + 57 \cdot x_8 &\leq 2300, \\
95 \cdot x_1 + 52 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 40 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7 + 88 \cdot x_8 &\leq 1900, \\
84 \cdot x_1 + 23 \cdot x_2 + 18 \cdot x_3 + 8 \cdot x_4 + 9 \cdot x_5 + 11 \cdot x_6 + 4 \cdot x_7 + 47 \cdot x_8 &\leq 1200, \\
68 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2 + 15 \cdot x_3 + 8 \cdot x_4 + 14 \cdot x_5 + 13 \cdot x_6 + 13 \cdot x_7 + 57 \cdot x_8 &\leq 2500, \\
51 \cdot x_1 + 67 \cdot x_2 + 8 \cdot x_3 + 18 \cdot x_4 + 8 \cdot x_5 + 18 \cdot x_6 + 9 \cdot x_7 + 66 \cdot x_8 &\leq 2100.
\end{aligned}$$

Исходя из здравого смысла, очевидно, что объемы выпуска продукции не могут быть отрицательными, т.е.

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0; x_5 \geq 0; x_6 \geq 0; x_7 \geq 0; x_8 \geq 0.$$

*5 этап. Выбор метода решения и численное решение задачи.*

Оптимизационная задача – это всегда задача математического программирования, т.е. задача определения численных значений управляемых переменных, максимизирующих или минимизирующих целевую функцию. В простейшем случае (как, например, в решаемой задаче) целевая функция и ограничения задачи являются линейными. Задача линейного программирования относится к задачам отыскания условного экстремума функции. Однако к решению этих задач нельзя применить хорошо разработанные методы математического анализа. Для их решения были созданы специальные вычислительные методы. К числу наиболее распространенных вычислительных методов относится симплексный метод, реализующий идею последовательного улучшения решения. Метод является универсальным, так как позволяет решить практически любую задачу линейного программирования, записанную в каноническом виде. Идея симплексного метода заключается в том, что, начиная с некоторого опорного решения, осуществляется последовательное направленное перемещение по опорным решениям задачи к

оптимальному. В пользу названного метода говорит тот факт, что под него разработано многочисленное стандартное программное обеспечение, в частности надстройка «Поиск решения» в среде ППП Microsoft Excel.

К сожалению, симплексный метод не всегда позволяет получить целочисленные значения управляемых переменных, поэтому в тех случаях, когда это необходимо, на переменные дополнительно накладываются ограничения целочисленности.

При решении более сложных задач, например, формирование оптимального портфеля ценных бумаг, используется аппарат нелинейного программирования.

Однако в тех случаях, когда округление результатов не несет существенной погрешности, есть смысл свести задачу к задаче линейного программирования и использовать для ее решения симплексный метод, поскольку в этом случае исследователь получает гораздо более богатый материал для дальнейшего анализа.

*6 этап. Анализ полученного решения и корректировка модели.*

В результате решения задачи возможны следующие исходы:

- целевая функция модели не ограничена;
- система ограничений модели несовместна и задача имеет недопустимое решение;
- получены численные значения управляемых переменных и целевой функции.

Если целевая функция математической модели не ограничена, значит в системе ограничений задачи не учтены одно или несколько существенных ограничений. В этой ситуации следует вернуться ко второму этапу экономико-математического исследования и повторить анализ существенных ограничений.

Если задача имеет недопустимое решение, значит система ограничений задачи несовместна. Как правило, это вызывается конфликтом между ресурсными и плановыми ограничениями задачи (имеющихся ресурсов не хватает для выпуска продукции в требуемом объеме). Методы устранения несовместности системы ограничений задачи линейного программирования будут рассмотрены ниже.

В наиболее благоприятном случае, когда получены численные значения управляемых переменных и целевой функции, проводится развернутый анализ результатов решения и его устойчивости.

## ***2. Процедура решения задачи в среде ППП Microsoft Excel***

Таблица с исходными данными задачи и рассчитанной величиной прибыли за единицу каждого изделия расположена на листе Excel и имеет вид:

|    | A                             | B            | C  | D  | E  | F  | G  | H  | I  | J                 |
|----|-------------------------------|--------------|----|----|----|----|----|----|----|-------------------|
| 5  | Оборудование                  | Виды изделий |    |    |    |    |    |    |    | Ресурс<br>времени |
| 6  |                               | 1            | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  |                   |
| 7  | ДИП - 300                     | 99           | 44 | 45 | 23 | 27 | 23 | 13 | 83 | 2200              |
| 8  | ДИП - 500                     | 124          | 63 | 8  | 45 | 31 | 34 | 10 | 57 | 2300              |
| 9  | карусельный                   | 95           | 52 | 0  | 40 | 0  | 0  | 0  | 88 | 1900              |
| 10 | расточный                     | 84           | 23 | 18 | 8  | 9  | 11 | 4  | 47 | 1200              |
| 11 | фрезерный                     | 68           | 9  | 15 | 8  | 14 | 13 | 13 | 57 | 2500              |
| 12 | сверлильный                   | 51           | 67 | 8  | 18 | 8  | 18 | 9  | 66 | 2100              |
| 13 | оптовая цена изделия, тыс.р.  | 55           | 39 | 46 | 75 | 56 | 49 | 36 | 12 |                   |
| 14 | себестоимость изделия, тыс.р. | 29           | 22 | 11 | 60 | 20 | 26 | 27 | 7  |                   |
| 15 | Прибыль                       | 26           | 17 | 35 | 15 | 36 | 23 | 9  | 5  |                   |

Для получения численного решения задачи сформированную нами экономико-математическую модель следует записать с использованием адресов ячеек электронной таблицы. В первую очередь резервируем пустые ячейки под управляемые переменные (ячейки B17:I18):

|    | A | B  | C  | D  | E  | F  | G  | H  | I  |
|----|---|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 16 |   |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 17 |   | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 |
| 18 |   |    |    |    |    |    |    |    |    |

Целевая функция задачи записывается в виде формулы согласно математической модели в одну из ячеек электронной таблицы, например в ячейке A16<sup>1</sup>. Согласно математической модели следует в произвольно выбранных ячейках электронной таблицы поместить формулы расчета затрат времени каждого оборудования, например, в ячейках K7:K12. Поскольку при расчете затрат времени ячейки с соответствующими нормами станкостоемкости должны умножаться на ячейки с управляемыми переменными, целесообразно использовать абсолютную адресацию и скопировать формулу из ячейки K7 на диапазон ячеек K8:K12. В результате выполненных действий рабочий лист Excel принимает вид:

|    | A                             | B            | C  | D  | E  | F  | G  | H  | I  | J                 | K                                   |
|----|-------------------------------|--------------|----|----|----|----|----|----|----|-------------------|-------------------------------------|
| 5  | Оборудование                  | Виды изделий |    |    |    |    |    |    |    | Ресурс<br>времени |                                     |
| 6  |                               | 1            | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  |                   |                                     |
| 7  | ДИП - 300                     | 99           | 44 | 45 | 23 | 27 | 23 | 13 | 83 | 2200              | СУММПРОИЗВ(B7:I7;\$B\$18:\$I\$18)   |
| 8  | ДИП - 500                     | 124          | 63 | 8  | 45 | 31 | 34 | 10 | 57 | 2300              | СУММПРОИЗВ(B8:I8;\$B\$18:\$I\$18)   |
| 9  | карусельный                   | 95           | 52 | 0  | 40 | 0  | 0  | 0  | 88 | 1900              | СУММПРОИЗВ(B9:I9;\$B\$18:\$I\$18)   |
| 10 | расточный                     | 84           | 23 | 18 | 8  | 9  | 11 | 4  | 47 | 1200              | СУММПРОИЗВ(B10:I10;\$B\$18:\$I\$18) |
| 11 | фрезерный                     | 68           | 9  | 15 | 8  | 14 | 13 | 13 | 57 | 2500              | СУММПРОИЗВ(B11:I11;\$B\$18:\$I\$18) |
| 12 | сверлильный                   | 51           | 67 | 8  | 18 | 8  | 18 | 9  | 66 | 2100              | СУММПРОИЗВ(B12:I12;\$B\$18:\$I\$18) |
| 13 | оптовая цена изделия, тыс.р.  | 55           | 39 | 46 | 75 | 56 | 49 | 36 | 12 |                   |                                     |
| 14 | себестоимость изделия, тыс.р. | 29           | 22 | 11 | 60 | 20 | 26 | 27 | 7  |                   |                                     |
| 15 | Прибыль                       | 26           | 17 | 35 | 15 | 36 | 23 | 9  | 5  |                   |                                     |
| 16 | СУММПРОИЗВ(B15:I15;B18:I18)   |              |    |    |    |    |    |    |    |                   |                                     |
| 17 |                               | x1           | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 |                   |                                     |
| 18 |                               |              |    |    |    |    |    |    |    |                   |                                     |

<sup>1</sup> Формулы расчета задаются с использованием соответствующих адресов ячеек электронной таблицы. Например, чтобы указать общие времени первого оборудования на выпуск первой продукции (99 · x1) нужно в предварительно выбранную ячейку записать формулу: =B7\*B18. Для записи произведений массивов данных может быть использована встроенная математическая функция СУММПРОИЗВ().

До использования процедуры «Поиск решения» и получения значений управляемых переменных  $x_i$  в ячейках с формулами (K7:K12 и A16) будут выводиться нулевые значения. Таким образом в ячейках электронной таблицы полностью записана экономико-математическая модель решаемой задачи.

После того, как математическая модель задачи сформирована, приступаем к процедуре поиска решения. В меню «Данные» выбираем пункт «Поиск решения»<sup>2</sup>. В открывшемся окне диалога «Поиска решения» заполняем поля, характеризующие сформированную математическую модель (рис.1).

Параметры поиска решения

Оптимизировать целевую функцию:

До: ☒ Максимум ☐ Минимум ☐ Значения:

Изменяя ячейки переменных:

В соответствии с ограничениями:

☒ Сделать переменные без ограничений неотрицательными

Выберите метод решения:

Метод решения

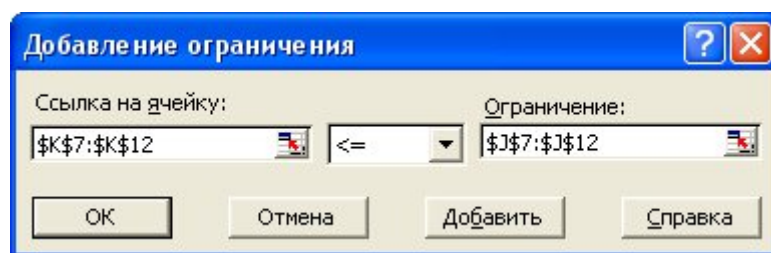
Для гладких нелинейных задач используйте поиск решения нелинейных задач методом ОПГ, для линейных задач - поиск решения линейных задач симплекс-методом, а для негладких задач - эволюционный поиск решения.

<sup>2</sup> При отсутствии в меню «Данные» пункта «Поиск решения» следует выбрать опцию «Надстройки» и установить флажок, активизирующий «Поиск решения».

**Рис. 1 Окно диалога «Поиск решения»**

В поле «Оптимизировать целевую функцию» указывается адрес ячейки, содержащей выражение для расчета целевой функции  $Z$ . В поле «До» указывается направление оптимизации, в нашем случае это максимум. В поле «Изменяя ячейки переменных» указываются адреса ячеек, содержащих управляемые переменные. Поле «В соответствии с ограничениями» позволяет добавить, изменить и удалить ограничения задачи, используя соответствующие команды с правой стороны поля.

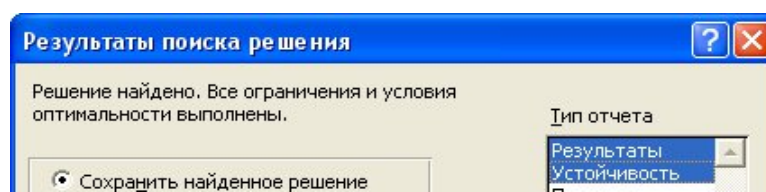
Для ввода ограничения выбираем команду «Добавить». В результате диалоговое окно «Поиск решения» сворачивается и появляется окно диалога «Добавление ограничения», в котором необходимо заполнить все открывшиеся поля. В поле «Ссылка на ячейку» указываются адреса ячеек, содержащих левые части неравенств и уравнений системы ограничений. Ограничения, имеющие одинаковый знак (например, все ресурсные ограничения) можно вводить одновременно, ссылаясь на смежный блок клеток электронной таблицы. В нашем случае при вводе ресурсных ограничений в поле «Ссылка на ячейку» указываются адреса ячеек, содержащих формулы затрат ресурсов (K7:K12). В следующем поле выбирается знак ограничения, для ресурсных ограничений это знак «меньше или равно». В поле «Ограничения» указываются адреса ячеек, содержащих правые части неравенств и уравнений системы ограничений. В нашем случае при вводе ресурсных ограничений в поле «Ограничения» указываются адреса ячеек, содержащих значения заданных фондов времени всех оборудования (J7:J12).



**Рис. 2 Окно диалога «Добавление ограничения»**

Принцип ввода плановых и технологических ограничений полностью аналогичен. После ввода ограничений нажимается кнопка «ОК» и система возвращается в окно диалога «Поиск решения». Для выбора метода решения необходимо в позиции «Выберите метод решения:» указать «Симплексный метод» и установить флажок в позиции «Сделать переменные без ограничений неотрицательными».

Для получения численного решения задачи следует нажать кнопку «Найти решение». В появившемся окне диалога следует в поле «Тип отчета» отметить позиции «Результаты» и «Устойчивость» и нажать «ОК».



**Рис. 3 Окно диалога «Результаты поиска решения»**

В результате на листе, содержащем математическую модель задачи, выводится оптимальное решение задачи – значения управляемых переменных, максимальная величина целевой функции и значения левых частей ограничений:

|    | A                             | B            | C  | D  | E  | F  | G  | H  | I  | J                 | K    |
|----|-------------------------------|--------------|----|----|----|----|----|----|----|-------------------|------|
| 5  | Оборудование                  | Виды изделий |    |    |    |    |    |    |    | Ресурс<br>времени |      |
| 6  |                               | 1            | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  |                   |      |
| 7  | ДИП - 300                     | 99           | 44 | 45 | 23 | 27 | 23 | 13 | 83 | 2200              | 2200 |
| 8  | ДИП - 500                     | 124          | 63 | 8  | 45 | 31 | 34 | 10 | 57 | 2300              | 2300 |
| 9  | карусельный                   | 95           | 52 | 0  | 40 | 0  | 0  | 0  | 88 | 1900              | 0    |
| 10 | расточный                     | 84           | 23 | 18 | 8  | 9  | 11 | 4  | 47 | 1200              | 749  |
| 11 | фрезерный                     | 68           | 9  | 15 | 8  | 14 | 13 | 13 | 57 | 2500              | 1098 |
| 12 | сверлильный                   | 51           | 67 | 8  | 18 | 8  | 18 | 9  | 66 | 2100              | 624  |
| 13 | оптовая цена изделия, тыс.р.  | 55           | 39 | 46 | 75 | 56 | 49 | 36 | 12 |                   |      |
| 14 | себестоимость изделия, тыс.р. | 29           | 22 | 11 | 60 | 20 | 26 | 27 | 7  |                   |      |
| 15 | Прибыль                       | 26           | 17 | 35 | 15 | 36 | 23 | 9  | 5  |                   |      |
| 16 | 2803,986429                   |              |    |    |    |    |    |    |    |                   |      |
| 17 |                               | x1           | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 |                   |      |
| 18 |                               | 0            | 0  | 5  | 0  | 73 | 0  | 0  | 0  |                   |      |

Одновременно автоматически создаются два новых рабочих листа, на которых выводятся заявленные отчеты по результатам и по устойчивости.

### ***3. Анализ отчета по результатам решения***

Выполним анализ выведенного «Поиском решения» Отчета по результатам, который выглядит следующим образом:

|    |                                   |             |                   |                        |               |        |  |
|----|-----------------------------------|-------------|-------------------|------------------------|---------------|--------|--|
| 14 | Ячейка целевой функции (Максимум) |             |                   |                        |               |        |  |
| 15 | Ячейка                            | Имя         | Исходное значение | Окончательное значение |               |        |  |
| 16 | \$A\$16                           | Прибыль     | 0                 | 2804                   |               |        |  |
| 17 |                                   |             |                   |                        |               |        |  |
| 18 |                                   |             |                   |                        |               |        |  |
| 19 | Ячейки переменных                 |             |                   |                        |               |        |  |
| 20 | Ячейка                            | Имя         | Исходное значение | Окончательное значение | Целочисленное |        |  |
| 21 | \$B\$18                           | x1          | 0                 | 0                      | Продолжить    |        |  |
| 22 | \$C\$18                           | x2          | 0                 | 0                      | Продолжить    |        |  |
| 23 | \$D\$18                           | x3          | 0                 | 5                      | Продолжить    |        |  |
| 24 | \$E\$18                           | x4          | 0                 | 0                      | Продолжить    |        |  |
| 25 | \$F\$18                           | x5          | 0                 | 73                     | Продолжить    |        |  |
| 26 | \$G\$18                           | x6          | 0                 | 0                      | Продолжить    |        |  |
| 27 | \$H\$18                           | x7          | 0                 | 0                      | Продолжить    |        |  |
| 28 | \$I\$18                           | x8          | 0                 | 0                      | Продолжить    |        |  |
| 29 |                                   |             |                   |                        |               |        |  |
| 30 |                                   |             |                   |                        |               |        |  |
| 31 | Ограничения                       |             |                   |                        |               |        |  |
| 32 | Ячейка                            | Имя         | Значение ячейки   | Формула                | Состояние     | Допуск |  |
| 33 | \$K\$7                            | ДИП - 300   | 2200              | \$K\$7<=\$J\$7         | Привязка      | 0      |  |
| 34 | \$K\$8                            | ДИП - 500   | 2300              | \$K\$8<=\$J\$8         | Привязка      | 0      |  |
| 35 | \$K\$9                            | карусельный | 0                 | \$K\$9<=\$J\$9         | Без привязки  | 1900   |  |
| 36 | \$K\$10                           | расточный   | 749               | \$K\$10<=\$J\$10       | Без привязки  | 451    |  |
| 37 | \$K\$11                           | фрезерный   | 1098              | \$K\$11<=\$J\$11       | Без привязки  | 1402   |  |
| 38 | \$K\$12                           | сверлильный | 624               | \$K\$12<=\$J\$12       | Без привязки  | 1476   |  |

Согласно отчету, максимальная прибыль, которую может получить предприятие, составляет 2 804 тыс. р. Как видно из таблицы «Изменяемые ячейки», для получения такой прибыли необходимо выпускать третье и пятое изделия в объемах 5 и 73 единицы соответственно. Остальные изделия выпускать нецелесообразно.

В таблице «Ограничения» столбец «Значение» содержит числовые значения левых частей ограничений математической модели. В ячейке D21 число 2 200 – это фактические затраты времени оборудования ДИП-300 на весь оптимальный выпуск продукции. В ячейках D22:D26 выведены значения фактических затрат времени всех остальных групп оборудования. По полученным результатам видно, что карусельное оборудование не задействовано в процессе выпуска продукции.

Ограничения, которые по результатам решения выполняются как строгие равенства, имеют статус «связанное», в противном случае – «не связанное». В столбце «Допуск» указана разница между правой и левой частями ограничений. Для плановых ограничений это перевыполнение плана по выпуску продукции. Для ресурсных ограничений в столбце «Допуск» указывается неизрасходованный (оставшийся) объем соответствующего ресурса. В нашем случае полностью израсходован фонд времени оборудования ДИП-300 и ДИП-500, т.к. в столбце «Допуск» выведено нулевое значение. Ресурсы времени работы остальных оборудования являются избыточными. Разница между фондом (исходным запасом) времени работы этих групп оборудования и израсходованным в процессе

производства временем указана в столбце «Допуск». Например, неизрасходованный фонд времени расточного оборудования составляет 451 час. Следовательно, на указанное время оборудование может быть загружено дополнительной работой.

#### 4. Анализ отчета по устойчивости решения

Рассмотрим Отчет по устойчивости.

|    | A                 | B           | C             | D          | E               | F          | G          | H |
|----|-------------------|-------------|---------------|------------|-----------------|------------|------------|---|
| 6  | Ячейки переменных |             |               |            |                 |            |            |   |
| 7  |                   |             | Окончательное | Приведенн. | Целевая функция | Допустимое | Допустимое |   |
| 8  | Ячейка            | Имя         | Значение      | Стоимость  | Коэффициент     | Увеличение | Уменьшение |   |
| 9  | \$B\$18           | x1          | 0             | -112       | 26              | 112        | 1E+30      |   |
| 10 | \$C\$18           | x2          | 0             | -49        | 17              | 49         | 1E+30      |   |
| 11 | \$D\$18           | x3          | 5             | 0          | 35              | 25         | 26         |   |
| 12 | \$E\$18           | x4          | 0             | -26        | 15              | 26         | 1E+30      |   |
| 13 | \$F\$18           | x5          | 73            | 0          | 36              | 100        | 11         |   |
| 14 | \$G\$18           | x6          | 0             | -12        | 23              | 12         | 1E+30      |   |
| 15 | \$H\$18           | x7          | 0             | -6         | 9               | 6          | 1E+30      |   |
| 16 | \$I\$18           | x8          | 0             | -84        | 5               | 84         | 1E+30      |   |
| 17 |                   |             |               |            |                 |            |            |   |
| 18 | Ограничения       |             |               |            |                 |            |            |   |
| 19 |                   |             | Окончательное | Тень       | Ограничение     | Допустимое | Допустимое |   |
| 20 | Ячейка            | Имя         | Значение      | Цена       | Правая сторона  | Увеличение | Уменьшение |   |
| 21 | \$K\$7            | ДИП - 300   | 2200          | 0,68       | 2200            | 1094       | 197        |   |
| 22 | \$K\$8            | ДИП - 500   | 2300          | 0,57       | 2300            | 226        | 1909       |   |
| 23 | \$K\$9            | карусельный | 0             | 0          | 1900            | 1E+30      | 1900       |   |
| 24 | \$K\$10           | расточный   | 749           | 0          | 1200            | 1E+30      | 451        |   |
| 25 | \$K\$11           | фрезерный   | 1098          | 0          | 2500            | 1E+30      | 1402       |   |
| 26 | \$K\$12           | сверлильный | 624           | 0          | 2100            | 1E+30      | 1476       |   |

В таблице «Ячейки переменных» содержится информация об объемах выпуска каждого из пяти видов продукции (столбец «Окончательное Значение»). Столбец «Целевая функция Коэффициент» содержит коэффициенты перед управляемыми переменными в целевой функции  $Z$ . В данном случае целевые коэффициенты – это прибыль единицы соответствующей продукции.

Особый интерес при анализе полученных результатов представляет величина Приведенной стоимости.

Приведенная стоимость представляет собой двойственную оценку соответствующей управляемой переменной. Полный анализ теории двойственности проводится в курсе «Математическое программирование», поэтому здесь мы не будем подробно рассматривать этот теоретический раздел, остановимся лишь на анализе величины Приведенной стоимости с позиции трактовки полученных результатов.

Приведенная стоимость показывает величину изменения целевой функции при увеличении соответствующей управляемой переменной на одну единицу.

В нашем случае  $x_7 = 0$ . Если бы в математическую модель было добавлено ограничение  $x_7 = 1$ , то величина целевой функции (общей прибыли) снизилась бы на 6 тыс. р., т.к. нормированная стоимость для переменной  $x_1$  равна  $-6$ . Аналогично выполняется трактовка значений нормированной стоимости всех остальных управляемых переменных. Например, одно второе изделие, добавленное в выпуск, сократит общую прибыль 49 тыс. р., а одно шестое – на 12 тыс. р.

Согласно теории двойственности, приведенная стоимость для изделий, вошедших в выпуск всегда равна нулю (в нашем случае третье и пятое изделия).

Иногда возникает ситуация, когда управляемая переменная равна нулю и имеет нулевую приведенную стоимость. Такая ситуация носит название альтернативного оптимума. В этом случае можно получить множество оптимальных вариантов выпуска продукции с сохранением оптимальной величины целевой функции.

Реальный выпуск продукции должен осуществляться только после того, как построена математическая модель, выполнено решение задачи, проведен соответствующий анализ результатов и приняты корректные управленческие решения.

Текущая экономическая ситуация, отраженная в построенной математической модели, может меняться. Необходимо выявить, насколько устойчиво полученное оптимальное решение к изменению внешних условий.

Предположим, что цена на шестое изделие выросла на 8 тыс. р. Какое решение должно быть принято в этом случае? Оставить выпуск без изменения или включить в него шестое изделие за счет другой продукции?

Оптимальное решение характеризуется тремя основными показателями: структурой выпуска, объемами выпуска и величиной целевой функции.

Структура выпуска – это перечень изделий, вошедших в выпуск. В нашем случае, структуру выпуска определяют третье и пятое изделия.

Объемы выпуска – это то количество каждого вида изделий, которое выпускает предприятие. У нас выпускаются третье и пятое изделия в объемах 5 и 73 единицы соответственно, остальные изделия в выпуск не вошли, т.е. их объемы равны нулю.

Целевая функция, как было сказано выше – это прибыль, получаемая предприятием и составившая 2 804 тыс. р.

Исследуем, как изменение параметров модели, в частности, целевых коэффициентов, влияет на изменение оптимального решения, т.е. на результаты выпуска.

Основу анализа составляет тот факт, что изменение целевого коэффициента внутри интервала устойчивости не меняет структуру выпуска. Границы интервала устойчивости определяются величинами допустимых изменений целевого коэффициента. Допустимые

изменения приведены в таблице «Изменяемые ячейки» в столбцах Допустимое увеличение и Допустимое уменьшение. Верхняя граница интервала рассчитывается как сумма целевого коэффициента и допустимого увеличения, а нижняя – как разность между целевым коэффициентом и допустимым уменьшением. Отметим, что величина  $1E+30$  трактуется как бесконечность.

Рассчитаем интервал устойчивости для целевого коэффициента первого изделия:

верхняя граница:  $26 + 112 = 138$ ;

нижняя граница:  $26 - 1E+30 = -1E+30$ .

По всем видам выпускаемых изделий интервалы устойчивости имеют следующий вид:

|                  | Нижняя граница | Целевой коэффициент | Верхняя граница |
|------------------|----------------|---------------------|-----------------|
| <b>Изделие 1</b> | -1E+30         | 26                  | 138             |
| <b>Изделие 2</b> | -1E+30         | 17                  | 66              |
| <b>Изделие 3</b> | 9              | 35                  | 60              |
| <b>Изделие 4</b> | -1E+30         | 15                  | 41              |
| <b>Изделие 5</b> | 25             | 36                  | 136             |
| <b>Изделие 6</b> | -1E+30         | 23                  | 35              |
| <b>Изделие 7</b> | -1E+30         | 9                   | 15              |
| <b>Изделие 8</b> | -1E+30         | 5                   | 89              |

Предположим, что вследствие некоторого изменения внешних условий целевой коэффициент седьмого изделия вырос на 5 тыс. р. и составил, таким образом,  $9 + 5 = 14$  тыс. р. В данном случае целевой коэффициент не превысил величину верхней границы интервала устойчивости (15 тыс. р.), поэтому структура выпуска меняться не будет, т.е. продолжится выпуск только тех изделий, которые выпускались (3-е и 5-е) в прежних объемах, а изделие 7 в выпуск не войдет, следовательно, изменений в результатах выпуска не произойдет: структура выпуска, объемы выпуска и величина целевой функции не изменятся.

Предположим, что вследствие некоторого изменения внешних условий целевой коэффициент третьего изделия уменьшился на 13 тыс. р. и составил, таким образом,  $35 - 13 = 22$  тыс. р. В данном случае целевой коэффициент не стал меньше значения нижней границы интервала устойчивости (9), поэтому структура выпуска меняться не будет, т.е. продолжится выпуск изделий, которые выпускались (3-е и 5-е) в прежних объемах. Однако за счет сокращения целевого коэффициента третьего изделия неизбежно сократится величина целевой функции, т.е. прибыль предприятия сократится.

Предположим, что вследствие некоторого изменения внешних условий целевой коэффициент четвертого изделия увеличился на 30 тыс. р. и составил, таким образом,  $15 + 30 = 45$  тыс. р. В данном случае целевой коэффициент превысил величину верхней

границы интервала устойчивости (41), поэтому изменится структура выпуска, в который будет включено четвертое изделие, ставшее рентабельным. Включение в выпуск четвертого изделия будет произведено за счет другой, менее рентабельной, продукции. Очевидно, что в этом случае меняются структура выпуска (начинается выпуск четвертого изделия), объемы выпуска (перераспределяются имеющиеся ресурсы) и увеличивается общая прибыль.

Предположим, что вследствие некоторого изменения внешних условий целевой коэффициент пятого изделия уменьшился на 15 тыс. р. и составил, таким образом,  $36 - 15 = 21$  тыс. р. В данном случае целевой коэффициент стал меньше значения нижней границы интервала устойчивости (25), поэтому структура выпуска изменится, т.е. пятое изделие становится нерентабельным, и мы прекращаем его выпуск, а освободившиеся ресурсы направляем на выпуск более рентабельной продукции. Меняются структура и объемы выпуска, сокращается общая прибыль.

Отметим, что для изделий, не вошедших в выпуск нижняя граница интервала устойчивости равна минус бесконечности ( $-1E+30$ ). Это означает, что никакое сокращение целевых коэффициентов этих изделий в выпуске продукции ничего не изменит.

Систематизируем результаты проведенного анализа.

I. Изделие вошло в программу выпуска.

1. Изменение целевого коэффициента внутри интервала устойчивости не меняет структуру и объем выпуска, но меняет величину целевой функции.
2. а) При выходе целевого коэффициента за нижнюю границу интервала устойчивости изделие становится нерентабельным и снимается с выпуска. Освободившиеся ресурсы направляются на выпуск другой, более рентабельной, продукции. Меняются структура и объемы выпуска, ухудшается величина целевой функции.

б) При выходе целевого коэффициента за верхнюю границу интервала устойчивости рентабельность изделия возрастает настолько, что следует наращивать его выпуск за счет другой, менее рентабельной, продукции. Меняются структура и объемы выпуска, улучшается величина целевой функции.

II. Изделие не вошло в программу выпуска.

1. Изменение целевого коэффициента внутри интервала устойчивости не меняет величину целевой функции, структуру и объемы выпуска.
2. При выходе целевого коэффициента за верхнюю границу интервала устойчивости изделие становится рентабельным и включается в выпуск за счет

другой, менее рентабельной, продукции. Меняются структура и объемы выпуска, улучшается величина целевой функции.

В таблице «Ограничения» Отчета по устойчивости содержится информация об исходных значениях правых частей ограничений (столбец «Ограничение, Правая сторона») и о значениях левых частей ограничений, получаемых в результате решения задачи (столбец «Окончательное значение»).

В нашем случае столбец «Ограничение, Правая сторона» содержит информацию об исходных запасах используемых в производстве ресурсов. В столбце «Окончательное значение» выведена информация о реальных затратах каждого ресурса.

Особый интерес представляют значения столбца «Тень Цена». Теневая цена представляет собой двойственную оценку соответствующей дополнительной переменной (см. курс «Математическое программирование»). Теневая цена показывает величину изменения целевой функции при увеличении правой части соответствующего ограничения на одну единицу.

К примеру, увеличение фонда времени оборудования ДИП-300 на 1 час приведет к росту общей прибыли на 0,68 тыс. р., а увеличение фонда времени, например, карусельного оборудования в выпуске продукции ничего не изменит.

Т.о. при решении вопроса о наращивании ресурсов очевидно, что выгоднее наращивать те ресурсы, у которых в результатах решения теневая цена отлична от нуля (т.е. исчерпавшиеся). В этом случае могут измениться пропорции выпуска, но обязательно увеличится значение целевой функции.

Наращивание дефицитного ресурса, приводящее к увеличению целевой функции на найденное значение теневой цены, не безгранично. С определенного момента изменение правой части ограничения может изменить структуру выпуска. В этом случае, как правило, происходит скачкообразное изменение теневой цены.

Изменение ресурса в определенных пределах не меняет величину теневой цены. Мероприятия по изменению запаса ресурсов в этих пределах носят название малых мероприятий. Их эффективность достаточно точно измеряется с помощью теневой цены. Однако на определенном этапе изменение запаса ресурса приводит к уменьшению его дефицитности и в результате меняется величина теневой цены. В этом случае мероприятия по изменению запаса ресурса относят к категории больших мероприятий.

Рассмотрим еще одно направление анализа результатов оптимального выпуска с использованием показателя теневой цены.

В небольших объемах полностью израсходованные в оптимальном решении ресурсы являются взаимозаменяемыми. Теневая цена в этом случае определяет пропорции замены.

Вернемся к нашей задаче. По результатам оптимального выпуска полностью израсходованы фонды времени оборудования ДИП-300 и ДИП-500, поэтому именно эти ресурсы можно рассматривать как взаимозаменяемые.

Предположим, что в силу определенных обстоятельств в плановом периоде фонд времени оборудования ДИП-300 сократился на 100 часов, т.е. составил 2 100 час. Теневая цена этого ресурса равна 0,68. Тогда в результате сокращения фонда времени этого оборудования оптимальная величина целевой функции снизится на  $0,68 \cdot 100 = 68$  тыс. р. Чтобы предотвратить это снижение прибыли необходимо в определенном объеме увеличить запас одного из дефицитных (израсходованных по результатам решения) ресурсов. Этим ресурсом в нашем случае может быть только фонд времени оборудования ДИП-500, т.к. только его фонд времени (помимо ДИП-300) полностью израсходован по результатам оптимального решения задачи. Теневая цена для оборудования ДИП-500 составляет 0,57, т.е. каждый дополнительный час работы оборудования ДИП-500 увеличивает целевую функцию (общую прибыль) на 0,57 тыс. р. Чтобы восполнить потерянные из-за простоя оборудования ДИП-300 68 тыс. р., нужно увеличить время работы оборудования ДИП-500 на величину, определяемую с помощью отношения их теневых цен:  $0,68 : 0,57 = 1,18$  (час).

Мы предположили, что простой оборудования ДИП-300 составляет 100 часов, поэтому для сохранения оптимальной величины общей прибыли необходимо увеличить время работы оборудования ДИП-500 на  $1,18 \cdot 100 = 118$  часов.

Еще раз подчеркнем, что такая замена может осуществляться только в небольших объемах, при этом меняются результаты выпуска, но сохраняется величина целевой функции (общая прибыль).

Исследуем влияние изменения запасов ресурсов на изменение оптимального решения, т.е. на результаты выпуска.

Как было сказано выше, изменение показателя (в данном случае, запаса ресурса) внутри интервала устойчивости не меняет структуру выпуска. Границы интервала устойчивости, как и в случае целевых коэффициентов, определяются величинами допустимых изменений показателя (запаса ресурса). Допустимые изменения запасов ресурсов приведены в таблице «Ограничения» в столбцах «Допустимое увеличение» и «Допустимое уменьшение». Верхняя граница интервала рассчитывается как сумма исходного запаса ресурса и допустимого увеличения, а нижняя – как разность между исходным запасом ресурса и допустимым уменьшением.

Рассчитаем интервал устойчивости для фонда времени оборудования ДИП-300:

верхняя граница:  $2200 + 1094 = 3294$ ;

нижняя граница:  $2200 - 197 = 2003$ .

По всем видам используемых ресурсов интервалы устойчивости имеют следующий вид:

|             | Нижняя граница | Запас ресурса | Верхняя граница |
|-------------|----------------|---------------|-----------------|
| ДИП-300     | 2003           | 2200          | 3294            |
| ДИП-500     | 391            | 2300          | 2526            |
| карусельный | 0              | 1900          | 1E+30           |
| расточный   | 749            | 1200          | 1E+30           |
| фрезерный   | 1098           | 2500          | 1E+30           |
| сверлильный | 624            | 2100          | 1E+30           |

Предположим, что вследствие некоторого изменения внешних условий (например, увеличения коэффициента сменности) фонд времени работы оборудования ДИП-300 увеличился на 500 часов и составил, таким образом,  $2\,200 + 500 = 2\,700$  час. В данном случае новый фонд времени упомянутого оборудования не превысил величину верхней границы интервала устойчивости (3 294), поэтому структура выпуска меняться не будет, т.е. продолжится выпуск тех изделий, которые выпускались (3-е и 5-е), однако объемы выпуска этих изделий возрастут вследствие увеличения фонда времени оборудования ДИП-300. Рост объемов выпуска повлечет за собой рост величины целевой функции. Т.о., структура выпуска не изменится, но увеличатся объемы выпуска и величина целевой функции (общей прибыли).

Предположим, что вследствие некоторого изменения внешних условий (например, необходимости профилактического обслуживания) фонд времени оборудования ДИП-300 уменьшился на 200 часов и составил, таким образом,  $2\,200 - 200 = 2\,000$  час. В данном случае новый фонд времени оборудования стал меньше значения нижней границы интервала устойчивости (2 003). В результате изменится структура выпуска, сократятся объемы выпуска и величина целевой функции (общей прибыли).

Систематизируем результаты проведенного анализа.

I. Ресурс израсходован полностью (является дефицитным).

1. Изменение запаса ресурса внутри интервала устойчивости не меняет структуру, но меняет объемы выпуска и, соответственно, величину целевой функции.

2. Выход величины запаса ресурса за границу интервала устойчивости приводит к изменению структуры выпуска, объемов выпуска и величины целевой функции.

II. Ресурс имеется в избытке (не является дефицитным).

1. Изменение запаса ресурса внутри интервала устойчивости в выпуске продукции ничего не меняет: сохраняются структура выпуска, объемы выпуска и величина целевой функции.

2. Выход величины запаса ресурса за нижнюю границу интервала устойчивости (верхняя граница для избыточного ресурса всегда равна бесконечности) приводит к изменению структуры выпуска, объемов выпуска и снижению величины целевой функции.

### **5. Анализ рентабельности оптимального решения**

Исследование рентабельности оптимального решения проводится на основе результатов решения двойственной задачи. Здесь следует понимать, что речь идет о математической рентабельности, которая позволяет оценить окупаются или нет условные затраты на изготовление продукции. Напомним, что любой задаче линейного программирования можно поставить в соответствие двойственную задачу. При этом, если исходная задача имеет оптимальное решение, то его имеет и двойственная, а оптимальные величины целевых функций совпадают.

Правила построения двойственной задачи.

1. Если целевая функция исходной задачи максимизируется, то целевая функция двойственной задачи минимизируется и наоборот, если целевая функция исходной задачи минимизируется, то целевая функция двойственной задачи максимизируется.

2. Коэффициентами при переменных в целевой функции двойственной задачи являются свободные члены системы ограничений исходной задачи.

3. Коэффициенты, стоящие в столбцах системы ограничений исходной задачи, будут расположены в строках системы ограничений двойственной задачи.

4. Знак неравенства в системе ограничений двойственной задачи меняется на противоположный.

5. Свободными членами системы ограничений двойственной задачи являются коэффициенты целевой функции исходной задачи.

6. На переменные двойственной задачи накладываются условия неотрицательности.

Запишем математическую модель исходной задачи:

$$\begin{aligned} Z &= 26 \cdot x_1 + 17 \cdot x_2 + 35 \cdot x_3 + 15 \cdot x_4 + 36 \cdot x_5 + 23 \cdot x_6 + 9 \cdot x_7 + 5 \cdot x_8 \rightarrow \max, \\ 99 \cdot x_1 + 44 \cdot x_2 + 45 \cdot x_3 + 23 \cdot x_4 + 27 \cdot x_5 + 23 \cdot x_6 + 13 \cdot x_7 + 83 \cdot x_8 &\leq 2200, \\ 124 \cdot x_1 + 63 \cdot x_2 + 8 \cdot x_3 + 45 \cdot x_4 + 31 \cdot x_5 + 34 \cdot x_6 + 10 \cdot x_7 + 57 \cdot x_8 &\leq 2300, \\ 95 \cdot x_1 + 52 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 40 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7 + 88 \cdot x_8 &\leq 1900, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
84 \cdot x_1 + 23 \cdot x_2 + 18 \cdot x_3 + 8 \cdot x_4 + 9 \cdot x_5 + 11 \cdot x_6 + 4 \cdot x_7 + 47 \cdot x_8 &\leq 1200, \\
68 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2 + 15 \cdot x_3 + 8 \cdot x_4 + 14 \cdot x_5 + 13 \cdot x_6 + 13 \cdot x_7 + 57 \cdot x_8 &\leq 2500, \\
51 \cdot x_1 + 67 \cdot x_2 + 8 \cdot x_3 + 18 \cdot x_4 + 8 \cdot x_5 + 18 \cdot x_6 + 9 \cdot x_7 + 66 \cdot x_8 &\leq 2100.
\end{aligned}$$

Пользуясь приведенными выше правилами построения двойственной задачи, запишем ее математическую модель:

$$\begin{aligned}
W &= 2200 \cdot u_1 + 2300 \cdot u_2 + 1900 \cdot u_3 + 1200 \cdot u_4 + 2500 \cdot u_5 + 2100 \cdot u_6 \rightarrow \min. \\
99 \cdot u_1 + 124 \cdot u_2 + 95 \cdot u_3 + 84 \cdot u_4 + 68 \cdot u_5 + 51 \cdot u_6 &\geq 26, \\
44 \cdot u_1 + 63 \cdot u_2 + 52 \cdot u_3 + 23 \cdot u_4 + 9 \cdot u_5 + 67 \cdot u_6 &\geq 17, \\
45 \cdot u_1 + 8 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3 + 18 \cdot u_4 + 15 \cdot u_5 + 8 \cdot u_6 &\geq 35, \\
23 \cdot u_1 + 45 \cdot u_2 + 40 \cdot u_3 + 8 \cdot u_4 + 8 \cdot u_5 + 18 \cdot u_6 &\geq 15, \\
27 \cdot u_1 + 31 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3 + 9 \cdot u_4 + 14 \cdot u_5 + 8 \cdot u_6 &\geq 36, \\
23 \cdot u_1 + 34 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3 + 11 \cdot u_4 + 13 \cdot u_5 + 18 \cdot u_6 &\geq 23, \\
13 \cdot u_1 + 10 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3 + 4 \cdot u_4 + 13 \cdot u_5 + 9 \cdot u_6 &\geq 9, \\
83 \cdot u_1 + 57 \cdot u_2 + 88 \cdot u_3 + 47 \cdot u_4 + 57 \cdot u_5 + 66 \cdot u_6 &\geq 5.
\end{aligned}$$

Найдем значения двойственных переменных. Их можно определить, используя результаты решения исходной задачи. Значения двойственных переменных совпадают с величиной теневой цены в исходной задаче. Необходимо учесть, что на переменные симметричной двойственной задачи также накладываются условия не отрицательности.

Таким образом,  $u_1=0,68$ ;  $u_2=0,57$ ;  $u_3=0$ ;  $u_4=0$ ;  $u_5=0$ ;  $u_6=0$ .

Подставим оптимальные значения двойственных переменных в целевую функцию двойственной задачи и убедимся, что оптимальные значения целевых функций прямой и двойственной задачи совпадают:

$$W_{\min} = 2\,200 \cdot 0,68 + 2\,300 \cdot 0,57 + 1\,900 \cdot 0 + 1\,200 \cdot 0 + 2\,500 \cdot 0 + 2\,100 \cdot 0 = 2\,804^3.$$

Выполним анализ ограничений двойственной задачи. Левая часть первого ограничения характеризует затраты ресурсов на изготовление единицы первой продукции, а правая часть этого ограничения характеризует величину прибыли от одной единицы первой продукции. Полностью аналогично характеризуются остальные семь ограничения двойственной задачи.

Введем понятие рентабельности изделия с точки зрения математической модели. Левая часть характеризует условные затраты ресурсов на единицу изделия, которые минимизируются, а правая часть ограничения – условную выгоду от его реализации, которая максимизируется.

---

<sup>3</sup> Незначительные расхождения между в результатах вызваны погрешностями округления при вычислениях.

Исходная задача заключается в определении плана выпуска изделий при заданных ограничениях на ресурсы, обеспечивающего максимизацию прибыли. Двойственная задача позволяет оценить единицу каждого ресурса при минимизации их суммарной стоимости. Продукция считается рентабельной, если соответствующее ей ограничение двойственной задачи, удовлетворяется ее оптимальным решением как строгое равенство.

Оценим рентабельность изделий.

$$\begin{aligned}\text{Изделие 1: } & 99 \cdot u_1 + 124 \cdot u_2 + 95 \cdot u_3 + 84 \cdot u_4 + 68 \cdot u_5 + 51 \cdot u_6 = \\ & = 99 \cdot 0,68 + 124 \cdot 0,57 + 95 \cdot 0 + 84 \cdot 0 + 68 \cdot 0 + 51 \cdot 0 = 138 \geq 26,\end{aligned}$$

т.е. условные теневые затраты не окупаются величиной получаемой прибыли, а значит, изделие не является рентабельным.

$$\begin{aligned}\text{Изделие 2: } & 44 \cdot u_1 + 63 \cdot u_2 + 52 \cdot u_3 + 23 \cdot u_4 + 9 \cdot u_5 + 67 \cdot u_6 = \\ & = 44 \cdot 0,68 + 63 \cdot 0,57 + 52 \cdot 0 + 23 \cdot 0 + 9 \cdot 0 + 67 \cdot 0 = 66 \geq 17,\end{aligned}$$

т.е. изделие не является рентабельным.

$$\begin{aligned}\text{Изделие 3: } & 45 \cdot u_1 + 8 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3 + 18 \cdot u_4 + 15 \cdot u_5 + 8 \cdot u_6 = \\ & = 45 \cdot 0,68 + 8 \cdot 0,57 + 0 \cdot 0 + 18 \cdot 0 + 15 \cdot 0 + 8 \cdot 0 = 35 = 35,\end{aligned}$$

т.е. условные теневые затраты окупаются величиной получаемой прибыли, а значит, изделие является рентабельным.

$$\begin{aligned}\text{Изделие 4: } & 23 \cdot u_1 + 45 \cdot u_2 + 40 \cdot u_3 + 8 \cdot u_4 + 8 \cdot u_5 + 18 \cdot u_6 = \\ & = 23 \cdot 0,68 + 45 \cdot 0,57 + 40 \cdot 0 + 8 \cdot 0 + 8 \cdot 0 + 18 \cdot 0 = 41 \geq 15,\end{aligned}$$

т.е. изделие не является рентабельным.

$$\begin{aligned}\text{Изделие 5: } & 27 \cdot u_1 + 31 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3 + 9 \cdot u_4 + 14 \cdot u_5 + 8 \cdot u_6 = \\ & = 27 \cdot 0,68 + 31 \cdot 0,57 + 0 \cdot 0 + 9 \cdot 0 + 14 \cdot 0 + 8 \cdot 0 = 36 = 36,\end{aligned}$$

т.е. изделие является рентабельным.

$$\begin{aligned}\text{Изделие 6: } & 23 \cdot u_1 + 34 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3 + 11 \cdot u_4 + 13 \cdot u_5 + 18 \cdot u_6 = \\ & = 23 \cdot 0,68 + 34 \cdot 0,57 + 0 \cdot 0 + 11 \cdot 0 + 13 \cdot 0 + 18 \cdot 0 = 35 \geq 23,\end{aligned}$$

т.е. изделие не является рентабельным.

$$\begin{aligned}\text{Изделие 7: } & 13 \cdot u_1 + 10 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3 + 4 \cdot u_4 + 13 \cdot u_5 + 9 \cdot u_6 = \\ & = 13 \cdot 0,68 + 10 \cdot 0,57 + 0 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 13 \cdot 0 + 9 \cdot 0 = 15 \geq 9,\end{aligned}$$

т.е. изделие не является рентабельным.

$$\begin{aligned}\text{Изделие 8: } & 83 \cdot u_1 + 57 \cdot u_2 + 88 \cdot u_3 + 47 \cdot u_4 + 57 \cdot u_5 + 66 \cdot u_6 = \\ & = 83 \cdot 0,68 + 57 \cdot 0,57 + 88 \cdot 0 + 47 \cdot 0 + 57 \cdot 0 + 66 \cdot 0 = 89 \geq 5,\end{aligned}$$

т.е. изделие не является рентабельным.

Однако этих расчетов можно было не проводить, т.к. по результатам решения понятно какая продукция будет рентабельной. В нашем случае рентабельны третье и пятое

изделия. Оценку рентабельности изделий с помощью двойственной задачи целесообразно проводить при включении в выпуск новых изделий.

Предположим, предприятие расширяет ассортимент выпускаемой продукции и планирует включить в производство еще два изделия: девятое и десятое. В табл. 2 приведены нормы затрат ресурсов и величина прибыли от единицы каждого из этих изделий.

Таблица 2

| Ресурсы          | Изделие 9 | Изделие 10 |
|------------------|-----------|------------|
| ДИП - 300        | 21        | 12         |
| ДИП - 500        | 10        | 75         |
| карусельный      | 45        | 14         |
| расточный        | 12        | 58         |
| фрезерный        | 37        | 25         |
| сверлильный      | 18        | 14         |
| Прибыль, тыс. р. | 20        | 40         |

Оценим рентабельность девятого и десятого изделий.

$$\text{Изделие 9: } 21 \cdot u_1 + 10 \cdot u_2 + 45 \cdot u_3 + 12 \cdot u_4 + 37 \cdot u_5 + 18 \cdot u_6 = \\ = 21 \cdot 0,68 + 10 \cdot 0,57 + 45 \cdot 0 + 12 \cdot 0 + 37 \cdot 0 + 18 \cdot 0 = 20 = 20,$$

т.е. изделие является рентабельным.

$$\text{Изделие 10: } 12 \cdot u_1 + 75 \cdot u_2 + 14 \cdot u_3 + 58 \cdot u_4 + 25 \cdot u_5 + 14 \cdot u_6 = \\ = 12 \cdot 0,68 + 75 \cdot 0,57 + 14 \cdot 0 + 58 \cdot 0 + 25 \cdot 0 + 14 \cdot 0 = 51 \geq 40,$$

т.е. изделие не является рентабельным.

Если предприятие включит в выпуск девятое изделие, то произойдет перераспределение ресурсов, изменятся объемы выпуска изделий, но максимальная величина целевой функции останется неизменной.

Если предприятие включит в выпуск десятое изделие, то произойдет перераспределение ресурсов, изменятся объемы выпуска изделий, снизится максимальная величина целевой функции.