

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце: МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФИО: Силин Яков Петрович  
Должность: Ректор  
Дата подписания: 03.06.2026 14:36:44  
Уникальный программный ключ:  
24f866be2aca16484036a8cbb5c507a9951e604

ФГБОУ ВО «Уральский государственный экономический университет»

**Одобрена**  
на заседании кафедры

27.11.2025 г.  
протокол № 3  
Зав. кафедрой Карпов А.Е.

**Утверждена**  
Советом по учебно-методическим  
вопросам и качеству образования

16 декабря 2025 г.  
протокол № 4  
Председатель Карх Д.А.  
(подпись)



### РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Наименование дисциплины Математика  
Направление подготовки 15.03.02 Технологические машины и оборудование  
Профиль Инжиниринг технологического оборудования  
Форма обучения очно-заочная  
Год набора 2026

Разработана:  
Ст. преподаватель  
Кньш А.А.

Доцент, к.ф.-м.н.  
Петров Н.П.

Доцент, к.п.н.  
Петрова С.Н.

Екатеринбург  
2025 г.

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ</b>	<b>3</b>
<b>1. ЦЕЛЬ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ</b>	<b>3</b>
<b>2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП</b>	<b>3</b>
<b>3. ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ</b>	<b>3</b>
<b>4. ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОСВОЕНИЯ ОПОП</b>	<b>3</b>
<b>5. ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН</b>	<b>4</b>
<b>6. ФОРМЫ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ШКАЛЫ ОЦЕНИВАНИЯ</b>	<b>5</b>
<b>7. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ</b>	<b>8</b>
<b>8. ОСОБЕННОСТИ ОРГАНИЗАЦИИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ ДЛЯ ЛИЦ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ЗДОРОВЬЯ</b>	<b>12</b>
<b>9. ПЕРЕЧЕНЬ ОСНОВНОЙ И ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ, НЕОБХОДИМОЙ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ</b>	<b>12</b>
<b>10. ПЕРЕЧЕНЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, ВКЛЮЧАЯ ПЕРЕЧЕНЬ ЛИЦЕНЗИОННОГО ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ И ИНФОРМАЦИОННЫХ СПРАВОЧНЫХ СИСТЕМ, ОНЛАЙН КУРСОВ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ПРИ ОСУЩЕСТВЛЕНИИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ</b>	<b>13</b>
<b>11. ОПИСАНИЕ МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЙ БАЗЫ, НЕОБХОДИМОЙ ДЛЯ ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ</b>	<b>13</b>

## ВВЕДЕНИЕ

Рабочая программа дисциплины является частью основной профессиональной образовательной программы высшего образования - программы бакалавриата, разработанной в соответствии с ФГОС ВО

ФГОС ВО	Федеральный государственный образовательный стандарт высшего образования - бакалавриат по направлению подготовки 15.03.02 Технологические машины и оборудование (приказ Минобрнауки России от 09.08.2021 г. № 728)
---------	--

### 1. ЦЕЛЬ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Введение студентов в дидактическую систему фундаментальных математических понятий таких разделов как линейная алгебра, аналитическая геометрия, математический анализ, теория вероятностей и методы оптимальных решений, которые выступают основой для изучения и анализа биологических объектов и процессов.

Задачи дисциплины:

- научить осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач;
- научить применять естественнонаучные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности.

### 2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП

Дисциплина относится к обязательной части учебного плана.

### 3. ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ

Промежуточная аттестация	Часов					З.е.
	Всего за семестр	Контактная работа (по уч.зан.)			Самостоятельная работа в том числе подготовка контрольных и курсовых	
		Всего	Лекции	Практические занятия, включая курсовое проектирование		
Семестр 1						
Зачет	108	16	8	8	88	3
Семестр 2						
Экзамен, Контрольная работа	144	16	8	8	119	4
	252	32	16	16	207	7

### 4. ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОСВОЕНИЯ ОПОП

В результате освоения ОПОП у выпускника должны быть сформированы компетенции, установленные в соответствии ФГОС ВО.

Шифр и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенций
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	ИД-1.УК-1 Знать: принципы сбора, отбора и обобщения информации

УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	ИД-2.УК-1 Уметь: соотносить разнородные явления и систематизировать их в рамках избранных видов профессиональной деятельности
	ИД-3.УК-1 Иметь практический опыт работы с информационными источниками, опыт научного поиска, создания научных текстов

**Общепрофессиональные компетенции (ОПК)**

Шифр и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенций
ОПК-1 Способен применять естественнонаучные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности;	ИД-1.ОПК-1 Знать фундаментальные понятия, законы и модели естественнонаучных и общеинженерных дисциплин для решения различных задач, в том числе прикладных
	ИД-2.ОПК-1 Уметь применять естественнонаучные и общеинженерные знания в профессиональной деятельности
	ИД-3.ОПК-1 Иметь практический опыт использования методов математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности

**5. ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН**

Тема	Часов						
	Наименование темы	Всего часов	Контактная работа (по уч.зан.)			Самост. работа	Контроль самостоятельной работы
			Лекции	Лабораторные	Практические занятия		
Семестр 1		104					
Тема 1.	Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии (УК-1,ОПК-1).	28	2		2	24	
Тема 2.	Элементы математического анализа (УК-1,ОПК-1).	28	2		2	24	

Тема 3.	Функции нескольких переменных (УК-1, ОПК-1).	28	2		2	24	
Тема 4.	Дифференциальные уравнения (УК-1, ОПК-1)	20	2		2	16	
Семестр 2		135					
Тема 5.	Методы оптимальных решений (УК-1, ОПК-1).	62	4		4	54	
Тема 6.	Теория вероятности и математической статистики (УК-1, ОПК-1)	73	4		4	65	

## 6. ФОРМЫ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ШКАЛЫ ОЦЕНИВАНИЯ

Раздел/Тема	Вид оценочного средства	Описание оценочного средства	Критерии оценивания
Текущий контроль (Приложение 4)			
Тема 1.	Аудиторная контрольная работа 1 (Приложение 4)	4 задания: 1,2,3) вычисление пределов функций; 4) Исследовать функцию на непрерывность.	Максимально возможное количество баллов - 10. Первые три задания оцениваются по 3 балла каждое, четвертое задание - 1 балл.
Тема 2.	Аудиторная контрольная работа 2 (Приложение 4)	3 задания: 1) вычисление определенного интеграла: площади или объема; 2) нахождение производной; 3) нахождение неопределенного интеграла.	Максимально возможное количество баллов - 10. Первое задание 4 балла, второе и третье по 3 балла
Тема 4.	Аудиторная контрольная работа 3 (Приложение 4)	4 задания: 1) выполнить действие над матрицами; 2) вычислить определитель; 3) решить систему линейных уравнений; 4) по заданным координатам вершин треугольника найти недостающие элементы.	Максимально возможное количество баллов - 10. Первое задание оценивается в 1 балл, задания 2,3,4 - по 3 балла.
Тема 5.	Аудиторная контрольная работа 4 (Приложение 4)	2 задания: 1) задача на геометрический метод решения; 2) транспортная задача.	Максимально возможное количество баллов - 10. Первое задание оценивается в 5 баллов, второе задание - 5 баллов.

Тема 6	Аудиторная контрольная работа 5 (Приложение 4)	3 задания: 1) задача на классическое определение вероятности; 2) задача на применение формул полной вероятности и Байеса; 3) задача на теоремы сложения и умножения вероятностей.	Максимально возможное количество баллов - 10. Первое и второе задания оцениваются по 3 балла, третье задание - 4 балла.
Тема 6	Аудиторная контрольная работа 6 (Приложение 4)	3 задания: 1) и 2) задания на применение формул по теме «Повторение независимых испытаний»; 3) задание на построение ряда распределения и вычисление математического ожидания и дисперсии ДСВ.	Максимально возможное количество баллов - 10. Первое и второе задания оцениваются по 3 балла, третье задание - 4 балла.
Промежуточная аттестация(Приложение 5)			
2 семестр (Эк)	Экзаменационный билет (Приложение 5)	20 билетов, состоящих из 1 теоретического вопроса и 1 практического задания.	Первый вопрос – теоретический, с обязательным доказательством теорем (полный ответ оценивается в 50 баллов), второй вопрос содержит задачу (полный ответ оценивается в 50 баллов). Максимально возможное количество баллов за решение билета - 100.
1 семестр (За)	Зачетный билет (Приложение 5)	20 билетов, состоящих из 1 теоретического вопроса и 1 практического задания.	Первый вопрос – теоретический, с обязательным доказательством теорем (полный ответ оценивается в 50 баллов), второй вопрос содержит задачу (полный ответ оценивается в 50 баллов). Максимально возможное количество баллов за решение билета - 100.

## ОПИСАНИЕ ШКАЛ ОЦЕНИВАНИЯ

Показатель оценки освоения ОПОП формируется на основе объединения текущего контроля и промежуточной аттестации обучающегося.

Показатель рейтинга по каждой дисциплине выражается в процентах, который показывает уровень подготовки студента.

Текущий контроль. Используется 100-балльная система оценивания. Оценка работы студента в течение семестра осуществляется преподавателем в соответствии с разработанной им системой оценки учебных достижений в процессе обучения по данной дисциплине.

В рабочих программах дисциплин и практик закреплены виды текущего контроля, планируемые результаты контрольных мероприятий и критерии оценки учебных достижений.

В течение семестра преподавателем проводится не менее 3-х контрольных мероприятий, по оценке деятельности студента. Если посещения занятий по дисциплине включены в рейтинг, то данный показатель составляет не более 20% от максимального количества баллов по дисциплине.

Промежуточная аттестация. Используется 5-балльная система оценивания. Оценка работы студента по окончании дисциплины (части дисциплины) осуществляется преподавателем в соответствии с разработанной им системой оценки достижений студента в процессе обучения по данной дисциплине. Промежуточная аттестация также проводится по окончании формирования компетенций.

Порядок перевода рейтинга, предусмотренных системой оценивания, по дисциплине, в пятибалльную систему.

Высокий уровень – 100% - 70% - отлично, хорошо.

Средний уровень – 69% - 50% - удовлетворительно.

Показатель оценки	По 5-балльной системе	Характеристика показателя
100% - 85%	отлично	обладают теоретическими знаниями в полном объеме, понимают, самостоятельно умеют применять, исследовать, идентифицировать, анализировать, систематизировать, распределять по категориям, рассчитать показатели, классифицировать, разрабатывать модели, алгоритмизировать, управлять, организовать, планировать процессы исследования, осуществлять оценку результатов на высоком уровне
84% - 70%	хорошо	обладают теоретическими знаниями в полном объеме, понимают, самостоятельно умеют применять, исследовать, идентифицировать, анализировать, систематизировать, распределять по категориям, рассчитать показатели, классифицировать, разрабатывать модели, алгоритмизировать, управлять, организовать, планировать процессы исследования, осуществлять оценку результатов.  Могут быть допущены недочеты, исправленные студентом самостоятельно в процессе работы (ответа и т.д.)
69% - 50%	удовлетворительно	обладают общими теоретическими знаниями, умеют применять, исследовать, идентифицировать, анализировать, систематизировать, распределять по категориям, рассчитать показатели, классифицировать, разрабатывать модели, алгоритмизировать, управлять, организовать, планировать процессы исследования, осуществлять оценку результатов на среднем уровне. Допускаются ошибки, которые студент затрудняется исправить самостоятельно.
49 % и менее	неудовлетворительно	обладают не полным объемом общих теоретическими знаниями, не умеют самостоятельно применять, исследовать, идентифицировать, анализировать, систематизировать, распределять по категориям, рассчитать показатели, классифицировать, разрабатывать модели, алгоритмизировать, управлять, организовать, планировать процессы исследования, осуществлять оценку результатов. Не сформированы умения и навыки для решения профессиональных задач
100% - 50%	зачтено	характеристика показателя соответствует «отлично», «хорошо», «удовлетворительно»
49 % и менее	не зачтено	характеристика показателя соответствует «неудовлетворительно»

## 7. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

### 7.1. Содержание лекций

Тема 1. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии (УК-1,ОПК-1).  
Матрицы. Линейные операции над матрицами: сложение матриц, умножение матрицы на число. Умножение матриц. Определители. Определители 2 и 3-го порядков. Общее понятие об определителе n-го порядка. Свойства определителей n-го порядка. Обратная матрица. Матричные уравнения. Общая теория систем линейных уравнений. Квадратные СЛУ. Метод Крамера. Нахождение решения с помощью обратной матрицы. Элементарные преобразования системы. Произвольные СЛУ. Теорема Кронекера– Капелли. Метод Жордана – Гаусса. Введение в векторную алгебру. Линейные операции над векторами на плоскости. Линейные операции над векторами в пространстве. Скалярное, векторное и смешанное произведения. Базисы на плоскости и в пространстве. Аналитическая геометрия на плоскости. Виды уравнения прямой на плоскости. Исследование взаимного расположения двух прямых на плоскости. Кривые второго порядка. Аналитическая геометрия в пространстве. Уравнение плоскости. Взаимное расположение двух плоскостей. Уравнения прямой в пространстве.

Тема 2. Элементы математического анализа (УК-1,ОПК-1).  
Определение производной. Основные правила дифференцирования. Дифференциал функции. Правило Лопиталю. Построение графиков функций. Неопределенный интеграл. Метод непосредственного интегрирования. Метод замены переменной. Метод интегрирования по частям. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование некоторых видов иррациональностей. Определенный интеграл. Основные свойства определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Основные методы интегрирования. Приложения определенного интеграла. Применение в экономике.

Тема 3. Функции нескольких переменных (УК-1, ОПК-1).  
Основные понятия. Частные производные. Дифференциал функции. Производная по направлению. Градиент. Экстремум функции нескольких переменных.

Тема 4. Дифференциальные уравнения (УК-1,ОПК-1)  
Основные понятия. Дифференциальные уравнения первого порядка. Д.У. с разделяющимися переменными. Д.У. однородные, линейные. Уравнение Бернулли. Д.У. второго порядка с постоянными коэффициентами однородные и неоднородные.

Тема 5. Методы оптимальных решений (УК-1, ОПК-1).  
Использование современных информационных технологий и программных средств при решении профессиональных задач. Графический метод решения задач линейного программирования. Симплексный метод решения задач линейного программирования. Транспортная задача.

Тема 6. Теория вероятности и математической статистики (УК-1,ОПК-1)  
Пространство случайных событий. Алгебра событий. Различные подходы к определению вероятности. Формула умножения вероятностей. Формула сложения вероятностей для совместных и несовместных событий. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Формула Бернулли. Формула Пуассона. Понятие случайной величины. Дискретные и непрерывные случайные величины. Ряд распределения. Плотность распределения вероятностей. Функция распределения. Свойства этих функций и связь между ними. Числовые характеристики случайной величины. Сбор, обработка и статистический анализ данных, необходимых для решения поставленных экономических задач.

<p>Тема 1. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии (УК-1,ОПК-1).  Матрицы. Линейные операции над матрицами: сложение матриц, умножение матрицы на число. Умножение матриц. Определители. Определители 2 и 3-го порядков. Общее понятие об определителе n-го порядка. Свойства определителей n-го порядка. Обратная матрица. Матричные уравнения. Общая теория систем линейных уравнений. Квадратные СЛУ. Метод Крамера. Нахождение решения с помощью обратной матрицы. Элементарные преобразования системы. Произвольные СЛУ. Теорема Кронекера– Капелли. Метод Жордана – Гаусса. Введение в векторную алгебру. Линейные операции над векторами на плоскости. Линейные операции над векторами в пространстве. Скалярное, векторное и смешанное произведения. Базисы на плоскости и в пространстве. Аналитическая геометрия на плоскости. Виды уравнения прямой на плоскости. Исследование взаимного расположения двух прямых на плоскости. Кривые второго порядка. Аналитическая геометрия в пространстве. Уравнение плоскости. Взаимное расположение двух плоскостей. Уравнения прямой в пространстве.</p>
<p>Тема 2. Элементы математического анализа (УК-1,ОПК-1).  Определение производной. Основные правила дифференцирования. Дифференциал функции. Правило Лопиталья. Построение графиков функций. Неопределенный интеграл. Метод непосредственного интегрирования. Метод замены переменной. Метод интегрирования по частям. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование некоторых видов иррациональностей. Определенный интеграл. Основные свойства определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Основные методы интегрирования. Приложения определенного интеграла. Применение в экономике.</p>
<p>Тема 3. Функции нескольких переменных (УК-1, ОПК-1).  Основные понятия. Частные производные. Дифференциал функции. Производная по направлению. Градиент. Экстремум функции нескольких переменных.</p>
<p>Тема 4. Дифференциальные уравнения (УК-1,ОПК-1)  Основные понятия. Дифференциальные уравнения первого порядка. Д.У. с разделяющимися переменными. Д.У. однородные, линейные. Уравнение Бернулли. Д.У. второго порядка с постоянными коэффициентами однородные и неоднородные.</p>
<p>Тема 5. Методы оптимальных решений (УК-1, ОПК-1).  Использование современных информационных технологий и программных средств при решении профессиональных задач. Графический метод решения задач линейного программирования. Симплексный метод решения задач линейного программирования. Транспортная задача.</p>
<p>Тема 6. Теория вероятности и математической статистики (УК-1,ОПК-1)  Пространство случайных событий. Алгебра событий. Различные подходы к определению вероятности. Формула умножения вероятностей. Формула сложения вероятностей для совместных и несовместных событий. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Формула Бернулли. Формула Пуассона. Понятие случайной величины. Дискретные и непрерывные случайные величины. Ряд распределения. Плотность распределения вероятностей. Функция распределения. Свойства этих функций и связь между ними. Числовые характеристики случайной величины. Сбор, обработка и статистический анализ данных, необходимых для решения поставленных экономических задач.</p>

### 7.3. Содержание самостоятельной работы

Тема 1. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии (УК-1,ОПК-1).

Матрицы. Линейные операции над матрицами: сложение матриц, умножение матрицы на число. Умножение матриц. Определители. Определители 2 и 3-го порядков. Общее понятие об определителе n-го порядка. Свойства определителей n-го порядка. Обратная матрица. Матричные уравнения. Общая теория систем линейных уравнений. Квадратные СЛУ. Метод Крамера. Нахождение решения с помощью обратной матрицы. Элементарные преобразования системы. Произвольные СЛУ. Теорема Кронекера– Капелли. Метод Жордана – Гаусса. Введение в векторную алгебру. Линейные операции над векторами на плоскости. Линейные операции над векторами в пространстве. Скалярное, векторное и смешанное произведения. Базисы на плоскости и в пространстве. Аналитическая геометрия на плоскости. Виды уравнения прямой на плоскости. Исследование взаимного расположения двух прямых на плоскости. Кривые второго порядка. Аналитическая геометрия в пространстве. Уравнение плоскости. Взаимное расположение двух плоскостей. Уравнения прямой в пространстве.

Тема 2. Элементы математического анализа (УК-1,ОПК-1).

Определение производной. Основные правила дифференцирования. Дифференциал функции. Правило Лопиталья. Построение графиков функций. Неопределенный интеграл. Метод непосредственного интегрирования. Метод замены переменной. Метод интегрирования по частям. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование некоторых видов иррациональностей. Определенный интеграл. Основные свойства определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Основные методы интегрирования. Приложения определенного интеграла. Применение в экономике.

Тема 3. Функции нескольких переменных (УК-1, ОПК-1).

Основные понятия. Частные производные. Дифференциал функции. Производная по направлению. Градиент. Экстремум функции нескольких переменных.

Тема 4. Дифференциальные уравнения (УК-1,ОПК-1)

Основные понятия. Дифференциальные уравнения первого порядка. Д.У. с разделяющимися переменными. Д.У. однородные, линейные. Уравнение Бернулли. Д.У. второго порядка с постоянными коэффициентами однородные и неоднородные.

Тема 5. Методы оптимальных решений (УК-1, ОПК-1).

Использование современных информационных технологий и программных средств при решении профессиональных задач. Графический метод решения задач линейного программирования. Симплексный метод решения задач линейного программирования. Транспортная задача.

Тема 6. Теория вероятности и математической статистики (УК-1,ОПК-1)

Пространство случайных событий. Алгебра событий. Различные подходы к определению вероятности. Формула умножения вероятностей. Формула сложения вероятностей для совместных и несовместных событий. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Формула Бернулли. Формула Пуассона. Понятие случайной величины. Дискретные и непрерывные случайные величины. Ряд распределения. Плотность распределения вероятностей. Функция распределения. Свойства этих функций и связь между ними. Числовые характеристики случайной величины. Сбор, обработка и статистический анализ данных, необходимых для решения поставленных экономических задач.

7.3.1. Примерные вопросы для самостоятельной подготовки к зачету/экзамену  
Приложение 1.

7.3.2. Практические задания по дисциплине для самостоятельной подготовки к зачету/экзамену  
Приложение 2.

7.3.3. Перечень курсовых работ  
Не предусмотрено

7.4. Электронное портфолио обучающегося  
размещаются контрольные работы

7.5. Методические рекомендации по выполнению контрольной работы  
приложение 6

7.6 Методические рекомендации по выполнению курсовой работы  
не предусмотрено

## **8. ОСОБЕННОСТИ ОРГАНИЗАЦИИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ ДЛЯ ЛИЦ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ЗДОРОВЬЯ**

### ***По заявлению студента***

В целях доступности освоения программы для лиц с ограниченными возможностями здоровья при необходимости кафедра обеспечивает следующие условия:

- особый порядок освоения дисциплины, с учетом состояния их здоровья;
- электронные образовательные ресурсы по дисциплине в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья;
- изучение дисциплины по индивидуальному учебному плану (вне зависимости от формы обучения);
- электронное обучение и дистанционные образовательные технологии, которые предусматривают возможности приема-передачи информации в доступных для них формах.
- доступ (удаленный доступ), к современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам, состав которых определен РПД.

## **9. ПЕРЕЧЕНЬ ОСНОВНОЙ И ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ, НЕОБХОДИМОЙ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ**

**Сайт библиотеки УрГЭУ**  
<http://lib.usue.ru/>

### **Основная литература:**

2. Хорошилова Е. В. Высшая математика. Лекции и семинары [Электронный ресурс]: учебное пособие для вузов. - Москва: Юрайт, 2024. - 452 с – Режим доступа: <https://urait.ru/bcode/541572>

### **Дополнительная литература:**

1. Шапкин А.С. Задачи с решениями по высшей математике, теории вероятностей, математической статистике, математическому программированию [Электронный ресурс]: Учебное пособие. - Москва: Издательско-торговая корпорация "Дашков и К", 2023. - 402 – Режим доступа: <https://znanium.com/catalog/product/2082512>

## **10. ПЕРЕЧЕНЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, ВКЛЮЧАЯ ПЕРЕЧЕНЬ ЛИЦЕНЗИОННОГО ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ И ИНФОРМАЦИОННЫХ СПРАВОЧНЫХ СИСТЕМ, ОНЛАЙН КУРСОВ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ПРИ ОСУЩЕСТВЛЕНИИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ**

### **Перечень лицензионного программного обеспечения:**

Astra Linux Common Edition. Договор №0417-ПО/2019 от 08.05.2019, Акт №Sk000343 от 24.05.2019 и Контракт № 35-У/2018 от 13.06.2018, Акт № УТ213 от 17.12.2018. Срок действия лицензии - без ограничения срока.

Libre Office. Лицензия GNU LGPL. Срок действия лицензии - без ограничения срока.

### **Перечень информационных справочных систем, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:**

#### **Математика**

<http://www.allmath.ru/mathan.htm>

#### **Математика**

[www.sosmath.com/index.html](http://www.sosmath.com/index.html)

## **11. ОПИСАНИЕ МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЙ БАЗЫ, НЕОБХОДИМОЙ ДЛЯ ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ**

Реализация учебной дисциплины осуществляется с использованием материально-технической базы УрГЭУ, обеспечивающей проведение всех видов учебных занятий и научно-исследовательской и самостоятельной работы обучающихся:

Специальные помещения представляют собой учебные аудитории для проведения всех видов занятий, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду УрГЭУ.

Все помещения укомплектованы специализированной мебелью и оснащены мультимедийным оборудованием (информационно-телекоммуникационным, иным компьютерным), доступом к информационно-поисковым, справочно-правовым системам, электронным библиотечным системам, базам данных действующего законодательства, иным информационным ресурсам служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Для проведения занятий лекционного типа презентации и другие учебно-наглядные пособия, обеспечивающие тематические иллюстрации.

7.3.1. Примерные вопросы для самостоятельной подготовки к зачету/экзамену

**1 семестр**  
**Вопросы к зачету**

1. Множества. Приведите примеры множеств и их подмножеств.
2. Операции над множествами. Приведите пример.
3. Определение функции одной переменной.
4. Способы задания функции.
5. Дайте определение окрестности точки.
6. Сформулируйте основные теоремы о пределах.
7. Назовите любые три неопределенности, возникающие при решении пределов. Опишите правила (методы) раскрытия данных неопределенностей.
8. Напишите формулы замечательных пределов.
9. Классификация точек разрывов функции.
10. Дайте определение производной функции.
11. Сформулируйте связь между непрерывностью и дифференцируемостью функции.
12. Опишите план схемы исследования функции и построения ее графика.
13. Дайте определение неопределенного интеграла от функции.
14. Перечислите основные методы интегрирования функции.
15. Определение матрицы.
16. Сформулируйте основные операции над матрицами.
17. Сформулируйте основные свойства определителя  $n$ -ого порядка.
18. Дайте определение совместной и несовместной систем линейных уравнений.
19. Дайте определение определенной и неопределенной систем линейных уравнений.
20. Перечислите методы решения систем линейных уравнений.

## 2 семестр

### Вопросы к экзамену

1. Дайте определение математической модели экономической задачи.
2. Какие составляющие необходимы для составления математической модели?
3. Основные задачи линейного программирования.
4. На чем основывается графический метод решения задач линейного программирования?
5. Алгоритм графического метода решения задач линейного программирования.
6. Основное содержание симплексного метода решения задач линейного программирования.
7. Что требуется найти при решении транспортных задач линейного программирования?
8. Перечислите методы нахождения опорного решения транспортных задач линейного программирования.
9. Сформулируйте предмет и цель теории вероятностей.
10. Дайте определение случайного события. Виды событий.
11. Что принимается за вероятность при классическом определении вероятности?
12. Сформулируйте определение случайной величины. Какие выделяют случайные величины?
13. Пропишите способы задания дискретной случайной величины.
14. Перечислите числовые характеристики дискретной случайной величины.
15. Опишите предмет и методы математической статистики.

7.3.2. Практические задания по дисциплине для самостоятельной подготовки  
к зачету/экзамену

1 семестр

№	Содержание задания	Проверяемая компетенция
<b>закрытого типа</b>		
1	Числу -2,3 соответствует множество а) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 3\}$ б) $\{x \in \mathbb{Z} \mid -10 \leq x \leq -7\}$ в) $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 0\}$ г) $\{x \in \mathbb{N} \mid 3 < x < 5\}$	УК-1, ОПК-1
2	Значение предела $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{3x}$ равно а) 0 б) 1 в) 5/3 г) 3/5	УК-1, ОПК-1
3	Производная функции $f(x) = x \ln x$ равна а) $1 - \ln x$ б) $\ln x - 1$ в) $\ln x + 1$ г) $1 + \ln x$	УК-1, ОПК-1
4	Множество первообразных функции $f(x) = \sqrt[4]{x}$ имеет вид а) $\frac{1}{4 \sqrt[4]{x^3}} + C$ б) $\frac{4}{5} \sqrt[4]{x^5} + C$ в) $\sqrt[4]{x^5} + C$ г) $x^5 + C$	УК-1, ОПК-1
5	Матрицы А, В и С имеют размеры 4'4, 4'2 и 4'4 соответственно. Тогда правильно определены операции над матрицами а) $(A+C)B$ б) $ABC$ в) $(A+B)C$ г) $(BC)A$	УК-1, ОПК-1
<b>открытого типа</b>		
1	Если матрицы А и В можно умножать, следует ли из этого, что их можно складывать? Ответ обоснуйте.	УК-1, ОПК-1
2	Может ли произведение неквадратных матриц быть квадратной матрицей? Ответ обоснуйте.	УК-1, ОПК-1

3	Угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y=e^x+3x^2-5x$ в точке $x=0$ равен	УК-1, ОПК-1
4	Если функция $f(x)=x\cdot\cos(x^2)$ , то производная первого порядка функции в точке $x=0$ равна	УК-1, ОПК-1
5	Определенный интеграл $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ равен:	УК-1, ОПК-1

## 2 семестр

№	Содержание задания	Проверяемая компетенция										
<b>закрытого типа</b>												
1	<p>Экономико-математическая модель считается линейной моделью лишь в том случае, если:</p> <p>а) Условия ограничений модели линейны;</p> <p>в) Целевая функция модели линейна;</p> <p>с) Как условия ограничений, так и целевая функция модели линейны;</p> <p>д) Целевая функция модели линейна, в составе условий ограничений имеется хотя бы одно линейное ограничение.</p>	УК-1, ОПК-1										
2	<p>Определить форму записи модели:</p> $Z = CX \rightarrow \max(\min)$ $A X \leq A_0$ $X \geq 0$ <p>а) Матричная форма записи</p> <p>в) Смешанная форма записи</p> <p>с) Каноническая форма записи</p> <p>д) Запись с помощью знаков суммирования</p>	УК-1, ОПК-1										
1	<p>Задачами линейного программирования являются:</p> <p>а) <math>F = x - 3y \text{ @ min,}</math>  <math>x^3 - 2y^3 \leq 3, 3x + y \leq 4, x \geq 0, y \leq -2</math></p> <p>в) <math>F = 5x + y \text{ @ max,}</math>  <math>3x - y^3 \leq 3, 3x + y \leq 8, y \leq -2</math></p> <p>с) <math>F = xy - z \text{ @ min,}</math>  <math>x + y + z = 8, -x + y^2 + z \leq 10,</math>  <math>x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0</math></p> <p>д) <math>F = x + xy \text{ @ max,}</math>  <math>3x - y^3 \leq 3, 3x + y \leq 8, y \leq -2</math></p>	УК-1, ОПК-1										
4	<p>В урне находятся 12 белых и 8 черных шаров. Какова вероятность того, что наудачу вынутый шар будет белым?</p> <p>а) 1;</p> <p>в) 0,6;</p> <p>с) 0,4;</p> <p>д) -1</p>	УК-1, ОПК-1										
5	<p>Из генеральной совокупности извлечена выборка объема <math>n=80</math>:</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td><math>x_i</math></td> <td>10</td> <td>15</td> <td>25</td> <td>30</td> </tr> <tr> <td><math>n_i</math></td> <td>20</td> <td><math>n_1</math></td> <td>10</td> <td>15</td> </tr> </table> <p>Тогда <math>n_1</math> равен</p> <p>а) 40;</p> <p>в) 25;</p> <p>с) 35;</p> <p>д) 20.</p>	$x_i$	10	15	25	30	$n_i$	20	$n_1$	10	15	УК-1, ОПК-1
$x_i$	10	15	25	30								
$n_i$	20	$n_1$	10	15								

<b>открытого типа</b>																						
1	Размах варьирования вариационного ряда 3, 4, 4, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 12, 14, 14 равен ...	УК-1, ОПК-1																				
2	Мода вариационного ряда 2, 2, 4, 5, 6, 6, 6, 7, 8, 9, 9 равна ...	УК-1, ОПК-1																				
3	<p>Из генеральной совокупности извлечена выборка объема <math>n = 50</math>:</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tbody> <tr> <td style="text-align: center;"><math>x_i</math></td> <td style="text-align: center;">11</td> <td style="text-align: center;">12</td> <td style="text-align: center;">14</td> <td style="text-align: center;">15</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"><math>y_i</math></td> <td style="text-align: center;">4</td> <td style="text-align: center;">19</td> <td style="text-align: center;">20</td> <td style="text-align: center;">7</td> </tr> </tbody> </table> <p>Тогда несмещенная оценка математического ожидания равна ...</p>	$x_i$	11	12	14	15	$y_i$	4	19	20	7	УК-1, ОПК-1										
$x_i$	11	12	14	15																		
$y_i$	4	19	20	7																		
4	<p>Транспортная задача, заданная распределительной таблицей</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tbody> <tr> <td></td> <td style="text-align: center;"><b><math>B_1</math></b></td> <td style="text-align: center;"><b><math>B_2</math></b></td> <td style="text-align: center;"><b><math>B_3</math></b></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"><b><math>A_1</math></b></td> <td style="text-align: center;">1</td> <td style="text-align: center;">3</td> <td style="text-align: center;">2</td> <td style="text-align: center;"><b>25</b></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"><b><math>A_2</math></b></td> <td style="text-align: center;">2</td> <td style="text-align: center;">3</td> <td style="text-align: center;">4</td> <td style="text-align: center;"><b>7</b></td> </tr> <tr> <td></td> <td style="text-align: center;"><b>17</b></td> <td style="text-align: center;"><b>9</b></td> <td style="text-align: center;"><b>b</b></td> <td></td> </tr> </tbody> </table> <p>будет закрытой, если ...</p>		<b><math>B_1</math></b>	<b><math>B_2</math></b>	<b><math>B_3</math></b>		<b><math>A_1</math></b>	1	3	2	<b>25</b>	<b><math>A_2</math></b>	2	3	4	<b>7</b>		<b>17</b>	<b>9</b>	<b>b</b>		УК-1, ОПК-1
	<b><math>B_1</math></b>	<b><math>B_2</math></b>	<b><math>B_3</math></b>																			
<b><math>A_1</math></b>	1	3	2	<b>25</b>																		
<b><math>A_2</math></b>	2	3	4	<b>7</b>																		
	<b>17</b>	<b>9</b>	<b>b</b>																			
5	Исход опыта, который может произойти или не произойти – это	УК-1, ОПК-1																				

Приложение 6  
к рабочей программе

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДЕНЫ

на заседании кафедры  
шахматного искусства и  
компьютерной математики

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ  
КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

по дисциплине

Математика

Прежде чем приступить к выполнению контрольной работы необходимо ознакомиться с теоретическим материалом. Рекомендуется также изучить Методические указания к решению задач (в конце данного пособия). Выбор варианта осуществляется с приведенной ниже таблицей. Работу следует сдать на проверку не позднее, чем за 3 дня до зачета/экзамена. Проверенная работа может быть возвращена на доработку. В этом случае студент выполняет работу над ошибками и сдает работу повторно.

Важно: работу следует загружать **одним** файлом (или архивом)

---

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**  
**по выполнению контрольной работы**  
**и варианты контрольных работ**

---

В соответствии с учебным планом студенты, обучающиеся в институте непрерывного образования, в процессе изучения курса «Математика» должны выполнить контрольную работу, которая является важной формой самостоятельной работы студентов. Она способствует углубленному изучению соответствующих тем курса. Ее цель – оказать помощь студентам в изучении математики, проверить усвоение ими отдельных вопросов курса, умение самостоятельно работать с литературой, наличие соответствующих умений и навыков.

При подготовке к контрольной работе студенту необходимо научиться работать со справочной и учебной литературой; усвоить основные теоретические положения; уметь анализировать условия задач, выбрать необходимые алгоритм и методы ее решения; оценить и проверить правильность полученного результата.

Для повышения эффективности самостоятельной работы студента в ходе выполнения им контрольной работы в данном комплексе приведены пояснения к решению типовых заданий и необходимые теоретические сведения, расположенные в разделе методических указаний по самостоятельной работе студентов в соответствии с темами курса.

При оформлении контрольной работы студенту необходимо соблюдать следующие требования:

1. Заполнить титульный лист по правилам, предусмотренным в институте непрерывного образования.
2. Аккуратно переписать условие задания.
3. Подробно описать решение задачи, при необходимости выполнить чертеж. Решение должно содержать необходимые комментарии и вычисления.
4. Исследования функций проводить в соответствии с предложенным алгоритмом.
5. В завершении необходимо написать полученный ответ и при необходимости сделать его проверку.
6. В конце работы должен быть приведен список фактически использованной литературы в алфавитном порядке, указана дата выполнения работы и поставлена подпись студента.

Контрольная работа выполняется в соответствии с предлагаемыми ниже вариантами. По номеру варианта необходимо выбрать порядковый номер примера в каждом задании каждой темы контрольной работы.

Например, для 5 варианта необходимо решить все пятые примеры всех заданий из всех тем контрольной работы.

Выбор варианта производится по начальной букве фамилии студента:

Начальная буква фамилии студента	Вариант
А, Б	1
В, Г	2
Д, Е, Ж	3
З, И, К	4
Л, М	5
Н, О, П	6
Р, С	7
Т, У, Ф, Х	8
Ц, Ч, Ш, Щ	9
Э, Ю, Я	10

Выполненные контрольные работы сдаются на проверку и рецензирование в университет в сроки, установленные учебным планом и графиком изучения дисциплины.

При проверке контрольной работы учитываются понимание сути вопроса, знание фактического материала, умение логично и ясно изложить решение. По качеству выполнения работы преподаватель судит об усвоении студентом изучаемых тем, делает замечания и пожелания по процессу изучения дисциплины.

Контрольная работа оценивается по принципу «зачтено / незачтено» и может быть зачтена при условии, что она выполнена с соблюдением распределения вариантов, написана самостоятельно, в соответствии с изученным теоретическим материалом.

Проверенная работа может быть возвращена на доработку. В этом случае студент должен провести работу над ошибками в этой же тетради и вновь сдать ее на проверку, указав на обложке, что она сдается повторно. Если рецензент предлагает переделать работу, то необходимо приложить к новой еще и незачтенную работу.

Получив зачет по контрольной работе, студент допускается к сдаче экзамена.

## ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

### КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

#### ТЕМА 1. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

1.1 Вычислить определитель:

$$1. \begin{vmatrix} -1 & 0 & -4 & 2 \\ 2 & -3 & 0 & -9 \\ 3 & 4 & -7 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$2. \begin{vmatrix} 15 & 0 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \\ 7 & 5 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

3.

$$\begin{vmatrix} 8 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$4. \begin{vmatrix} 1 & -5 & 4 & 3 \\ 1 & 7 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

$$5. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 7 & 9 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 9 \\ 2 & 4 & 5 & 8 \end{vmatrix}$$

6.

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -7 & 0 \\ 8 & 2 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 7 \\ -10 & 7 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$7. \begin{vmatrix} 4 & 0 & 7 & 0 \\ 1 & -3 & 7 & -7 \\ 0 & 1 & -1 & -9 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$8. \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 & 9 \\ 1 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 9 & 0 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

9.

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 9 & 5 \\ 1 & 0 & 7 & 0 \end{vmatrix}$$

$$10. \begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 7 & 3 \\ 5 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

1.2 Найти обратную матрицу для матрицы A и сделать проверку:

$$\begin{array}{l}
\begin{array}{ccc}
\mathfrak{A} & 1 & 6 & -7 \\
\mathfrak{C} & 1 & -8 & 3 \\
\mathfrak{E} & 0 & 1 & -1
\end{array} \\
1. A = \begin{array}{ccc}
\mathfrak{A} & 3 & -1 & 0 \\
\mathfrak{C} & -3 & 5 & 3 \\
\mathfrak{E} & 2 & 2 & -7
\end{array} \\
\begin{array}{ccc}
\mathfrak{A} & 9 & -3 & 4 \\
\mathfrak{C} & 1 & 0 & 5 \\
\mathfrak{E} & -2 & 3 & 2
\end{array} \\
3. A = \begin{array}{ccc}
\mathfrak{A} & 3 & 1 & 3 \\
\mathfrak{C} & -4 & 3 & -5 \\
\mathfrak{E} & 1 & 0 & 3
\end{array} \\
4. A = \begin{array}{ccc}
\mathfrak{A} & 6 & -1 & 9 \\
\mathfrak{C} & 0 & 2 & 5 \\
\mathfrak{E} & -2 & 1 & -8
\end{array} \\
5. A = \begin{array}{ccc}
\mathfrak{A} & -2 & -6 \\
\mathfrak{C} & 3 & 2 & 3 \\
\mathfrak{E} & 0 & 1 & -4
\end{array} \\
6. A = \begin{array}{ccc}
\mathfrak{A} & 12 & 0 \\
\mathfrak{C} & 1 & -4 & -7 \\
\mathfrak{E} & 2 & 3 & 0
\end{array} \\
7. A = \begin{array}{ccc}
\mathfrak{A} & 8 & -1 \\
\mathfrak{C} & 1 & 3 & 0 \\
\mathfrak{E} & 1 & 11 & -1
\end{array} \\
8. A = \begin{array}{ccc}
\mathfrak{A} & 2 & 1 & -3 \\
\mathfrak{C} & -3 & -5 & -2 \\
\mathfrak{E} & -5 & 0 & 2
\end{array} \\
9. A = \begin{array}{ccc}
\mathfrak{A} & 2 & -4 & 0 \\
\mathfrak{C} & 1 & -1 & 4 \\
\mathfrak{E} & -3 & 3 & 5
\end{array} \\
10. A = \begin{array}{ccc}
\mathfrak{A} & 2 & -4 & 0 \\
\mathfrak{C} & 1 & -1 & 4 \\
\mathfrak{E} & -3 & 3 & 5
\end{array}
\end{array}$$

## ТЕМА 2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Решить систему линейных уравнений двумя способами: методом обратной матрицы, методом Гаусса:

$$\begin{array}{l}
1. \begin{cases} 2x - 3y + 3z = -10 \\ x + 3y - 3z = 13 \\ x + z = 0 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + y + z = 11 \\ x + y + 2z = 8 \end{cases} \quad 3. \begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ -2x + 3y - 3z = -5 \\ 3x - 4y + 5z = 10 \end{cases} \\
4. \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ 3y + 4z + 6 = 0 \\ x + z = 1 \end{cases} \quad 5. \begin{cases} -2x + y + 6 = 0 \\ x - 2y - z = 5 \\ 3x + 4y - 2z = 13 \end{cases} \quad 6. \begin{cases} x - 2y - 3z = -4 \\ 4x + y + 2z = 13 \\ 2x + 5y + z = -7 \end{cases} \\
7. \begin{cases} 3x + y + 5z = 0 \\ 2x + 3y + 3z = 3 \\ 2x + y + 4z = -1 \end{cases} \quad 8. \begin{cases} 3x + 4y + 3z = 9 \\ x + 2y + z = 5 \\ x + 2z = -3 \end{cases} \quad 9. \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + y + z = 8 \\ y + 2z = 11 \end{cases} \\
10. \begin{cases} 2x + y + 3z = 3 \\ 3x + 2y + 4z = 7 \\ 2x - 3y + z = 1 \end{cases}
\end{array}$$

## ТЕМА 4. УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ

Даны две точки  $M_1$  и  $M_2$ .

1. Составить общее уравнение плоскости, проходящей через точку  $M_1$  перпендикулярно вектору  $\vec{n} = M_1M_2$ .
2. Определить длины отрезков, отсекаемые плоскостью от осей координат.

Сделать чертеж.

1.  $M_1(4;-2;0); M_2(4;2;5)$
2.  $M_1(3;-2;3); M_2(3;3;-3)$
3.  $M_1(-4;4;2); M_2(-4;2;5)$
4.  $M_1(1;-3;0); M_2(1;-1;3)$
5.  $M_1(-3;2;4); M_2(2;2;-1)$
6.  $M_1(5;-1;2); M_2(-2;-1;3)$
7.  $M_1(-3;2;4); M_2(-5;1;4)$
8.  $M_1(-2;0;4); M_2(1;0;-4)$
9.  $M_1(4;2;-1); M_2(0;3;-1)$
10.  $M_1(3;0;-3); M_2(1;0;-4)$

## ТЕМА 6. ПРЕДЕЛЫ ФУНКЦИЙ

Вычислить пределы:

$$1. a) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x} - x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg^2 \frac{x}{8} \operatorname{tg}^2 \frac{5x}{4}}{x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 3}{2x - 1}$$

$$2. a) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-x}{x^3-27}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+5}{e^x+2}$$

$$3. a) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 2x - 3}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\arcsin 12x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+5}{e^x-2}$$

$$4. a) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 4x + 3}{x+5}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \sin 2x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1}$$

$$5. a) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^4 + 2x^3 - 1}{100x^3 + 2x^2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \operatorname{ctg} 5x$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x}$$

$$6. a) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{e^x + 1}{e^{x+3}} - \frac{6}{9 - x^2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 10\pi x}{\operatorname{tg} 5x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x+1} \right)^{\frac{1}{x}}$$

$$7. a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2-x}}{x-1}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 5x}{\arcsin 10x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x} - 5}{e^x - 2}$$

$$8. a) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+2})$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{2x^2}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x+1} \right)^{\frac{1}{x}}$$

$$9. a) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2 - \sqrt{6+x}}{\sqrt{7-x} - 3}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\operatorname{tg}^2 6x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x+1}}$$

$$10. a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x + 1}{e^{1-x}} - \frac{3}{1-x^3}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{\operatorname{tg} 2x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x} - 5}{e^x - 2}$$

## ТЕМА 8. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

Используя дифференциальное исчисление, провести полное исследование функции и построить ее график:

$$1. y = 3\sqrt[3]{x^2} + 2x$$

$$2. y = x^2 - 6x + 3$$

$$3. y = x + \frac{27}{x^3}$$

$$4. y = x^2 + x$$

$$5. y = x^3 - 12x^2 + 36x$$

$$6. y = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

$$7. y = \frac{2}{x^2 - 4}$$

$$8. y = \frac{x}{1 - x^2}$$

$$9. y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$$

$$10. y = (x-1)^2(x+2)$$

## КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

### ТЕМА 9. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Вычислить неопределенные интегралы, используя методы интегрирования:

а) – непосредственное интегрирование;

б) – замены переменной;

в) - интегрирования по частям.

- |   |  |                                |
|---|--|--------------------------------|
| 1. а) $\int \frac{x^2 - 2x + 3}{x\sqrt{x}} dx$    | б) $\int e^{4 \cos x - 1} \sin x dx$             | в) $\int (x + 1) \ln x dx$     |
| 2. а) $\int g^2 x dx$                             | б) $\int \frac{\sqrt[6]{\ln^5 x}}{x} dx$         | в) $\int (x - 7) \sin x dx$    |
| 3. а) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} dx$          | б) $\int \frac{10x - 3x^2}{x^3 - 5x^2} dx$       | в) $\int x^2 e^{3x} dx$        |
| 4. а) $\int \frac{\cos 4x - \cos 6x}{\sin 5x} dx$ | б) $\int \frac{1}{x^2} e^{\frac{3}{x}} dx$       | в) $\int (4 - x) e^{-3x} dx$   |
| 5. а) $\int \frac{x - 9}{\sqrt{x + 3}} dx$        | б) $\int \cos x \sqrt{1 - 2 \sin x} dx$          | в) $\int n^2 x dx$             |
| 6. а) $\int \frac{1 - \cos 2x}{6 \sin x} dx$      | б) $\int \frac{6x - 5}{\sqrt{3x^2 - 5x + 4}} dx$ | в) $\int (1 - 3x) \cos 2x dx$  |
| 7. а) $\int (3^x + 5^x)^2 dx$                     | б) $\int \frac{7^x}{\sqrt{49^x + 1}} dx$         | в) $\int x^2 \ln x dx$         |
| 8. а) $\int \frac{\cos 4x - \cos 6x}{\sin 5x} dx$ | б) $\int \operatorname{ctg} 5x dx$               | в) $\int (x^2 - 6x) e^{-x} dx$ |
| 9. а) $\int \frac{1}{\sqrt{4 + 3x^2}} dx$         | б) $\int \frac{e^{5x}}{4 - e^{10x}} dx$          | в) $\int \sqrt{x} \ln x dx$    |
| 10. а) $\int \frac{2x^2 - 8}{16 - x^4} dx$        | б) $\int e^{3x} \sqrt[4]{e^{3x} + 8} dx$         | в) $\int (x + 2) \ln x dx$     |

## ТЕМА 10. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

10.1 Вычислить определенный интеграл:

1)  $\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} dx$

2)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx$

$$3) \int_1^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx$$

$$4) \int_1^{\sqrt[3]{e}} x^2 \ln x dx$$

$$5) \int_1^2 \frac{\ln x}{x^5} dx$$

$$6) \int_{-1}^0 (2x+3) \times e^{-x} dx$$

$$7) \int_1^2 (3x+2) \times \ln x dx$$

$$8) \int_0^p (p-x) \times \sin x dx$$

$$9) \int_0^{\frac{p}{2}} x \cos x dx$$

$$10) \int_0^{\frac{p}{2}} x \times \sin x dx$$

10.2 Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной заданными кривыми. Сделать чертеж.

$$1. y = \frac{3}{x}, \quad x + y = -4.$$

$$2. y = x^2, \quad y = -x^2, \quad x = 1.$$

$$3. 4x^2 - 3y = 0, \quad 2x - y = 0.$$

$$4. y = \frac{1}{x}, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 2.$$

$$5. y = \sqrt{x}, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 2.$$

$$6. 3x^2 - 4y = 0, \quad 2x - 4y + 1 = 0.$$

$$7. y = x^2 + 3, \quad x = 0, \quad y = x - 1, \quad x = 2.$$

$$8. y = x^2 - 1, \quad x = 0, \quad y = x - 5, \quad x = 2.$$

$$9. y = x^2, \quad y = \sqrt{x}.$$

$$10. 2x^2 - 3y = 0, \quad 2x - y = 0.$$

## ТЕМА 11. НЕСОБСТВЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Вычислить интеграл или установить его расходимость:

$$1. a) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{3x^2 + 1};$$

$$б) \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$$

$$2. a) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 6x + 13};$$

$$б) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

$$3. a) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 4x + 13};$$

$$б) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}.$$

$$4. a) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 4x + 8};$$

$$б) \int_{-2}^2 \frac{dx}{\sqrt{x+2}}.$$

$$5. a) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2};$$

$$б) \int_{-3}^1 \frac{dx}{\sqrt{x+3}}.$$

$$6. a) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2};$$

$$б) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}.$$

$$7. \text{ a) } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x}; \quad \text{б) } \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^3}.$$

$$8. \text{ a) } \int_5^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 8x + 20}; \quad \text{б) } \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{3-x}}.$$

$$9. \text{ a) } \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1}; \quad \text{б) } \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}.$$

$$10. \text{ a) } \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 2x + 2}; \quad \text{б) } \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}.$$

## ТЕМА 12. РЯДЫ

### 12.1 Числовые ряды. Исследовать ряд на сходимость

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{10n-1}.$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-3n}{n^3}.$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1,1^n}{n}.$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \cdot 0,8^n$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}.$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5}{2^n}$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n+7}$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{n^2+1}$$

### 12.2 Степенные ряды. Определить область сходимости степенного ряда

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{2^n}.$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}.$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{3^n}$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{4^n}.$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1,5)^n}{3^n}.$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{2^n}.$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} 3^n (x-2)^n$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} 5^n \frac{(x+3)^n}{4^n}.$$

$$9. \frac{(x+1,5)^n}{2^n}.$$

$$10. \frac{(x-2)^n}{3^n}.$$

### ТЕМА 13. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Исследовать функцию двух переменных на экстремум:

$$1. z = x^3 + 6y^2 + 9xy + 4$$

$$2. z = \frac{x^3}{3} + y^2$$

$$3. z = y^3 + yx^2 + x$$

$$4. z = \frac{x^2}{y-2}$$

$$5. z = x^3 + \frac{y^4}{4}$$

$$6. z = x^2 + 2y - 3xy$$

$$7. z = \frac{y^4}{4} - 2x^2$$

$$8. z = \frac{(y-1)^2}{x^2+1}$$

$$9. z = x^3 - 3xy$$

$$10. y = \frac{2}{x^2+2y}$$

### ТЕМА 15. РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

15.1 Найти общее и частное решения дифференциального уравнения:

$$1. (1+x^2)y' + (1+2y)x = 0, \\ y(1) = 0.$$

$$6. y(2x+1)y' = \sqrt{3+y^2}, \\ y(0) = -1.$$

$$2. (2x+1)dy + y^2dx = 0, y(0) = 1.$$

$$7. y^2y' = 3 - 2x, \\ y(0) = 1.$$

$$3. (1+2y)xdx + (1+x^2)dy = 0, \\ y(0) = 0.$$

$$8. y' - xy^2 = 2xy, \\ y(0) = -1.$$

$$4. y' \lg x + 2y = 2, y' \frac{\partial}{\partial x} = 2.$$

$$9. y(1+x^2)y' = x(1+y^2), \\ y(0) = -1.$$

$$10. y' \lg x + y = 1,$$

$$y' \frac{\partial}{\partial x} = \sqrt{2}.$$

$$5. y(1+x^2)y' = 1+y^2, \\ y(0) = -1.$$

15.2 Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям  $x_0=0$ ;  $y_0=1$ :

1.  $y'' + 6y' + 13y = 0$ ;

6.  $y'' - 4y' + 4y = 0$ ;

2.  $y'' - 4y' + 8y = 0$ ;

7.  $y'' - 6y' + 9y = 0$ ;

3.  $y'' + y' - 6y = 0$ ;

8.  $y'' - 4y' + 4y = 0$ ;

4.  $y'' + 2y' + 5y = 0$ ;

9.  $y'' + 2y' - 8y = 0$ ;

5.  $y'' - 4y' + 5y = 0$ ;

10.  $y'' - 4y' + 5y = 0$ ;

## 2 семестр

По каждому заданию в контрольных работах имеются методические указания, в которых подробно разобраны подобные задачи.

### **Задания вариантов:**

Задача 1. Решить задачу линейного программирования графическим методом.

Задача 2. Решить транспортную задачу.

### Вариант 1.

**Задача 1.** Для производства столов и шкафов мебельная фабрика использует три вида древесины. Нормы затрат каждого вида древесины на один стол – 0,2; 0,1; 1,2 куб. м, на один шкаф – 0,1; 0,3; 1,5 куб. м соответственно. Объемы древесины соответственно 40, 60 и 321 куб. м. Прибыль от реализации одного стола составляет 600 руб., от одного шкафа - 1800 руб. Найти оптимальный план производства, обеспечивающий максимальную прибыль.

### Задача 2.

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	запасы
$A_1$	4	3	5	2	300
$A_2$	7	1	2	3	200
$A_3$	9	2	4	5	100
потребности	150	150	150	150	

### Вариант 2.

**Задача 1.** Кирпичный завод выпускает кирпичи двух марок ( $M_1$  и  $M_2$ ). Для производства кирпича применяется глина трех видов. Нормы расхода глины каждого вида на 1 кирпич первой марки равны 4, 2, 1 условных единиц; на 1 кирпич второй марки - 2, 3, 4 усл.ед. Общие запасы глины А, В и С составляют 32, 32, 36 усл.ед. Прибыль от реализации 1 кирпича первой марки 5 усл.ед.(в руб.), а второй марки – 8 условных единиц. Составить план производства, обеспечивающий максимальную прибыль.

### Задача 2.

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	запасы
$A_1$	2	5	5	6	150
$A_2$	4	3	4	4	40
$A_3$	5	2	3	6	160
потребности	100	90	10	150	

### Вариант 3.

**Задача 1.** Для изготовления двух видов изделий В1 и В2 используются три вида сырья. Общее количество сырья первого вида - 130 кг, второго вида - 200 кг, третьего - 180 кг. Расход сырья (кг) каждого вида на изготовление единицы изделия В1 - 4 кг, 4 кг, 0 кг соответственно, на изготовление единицы изделия В2 - 3 кг, 10 кг, 15 кг соответственно. Найти оптимальный план производства изделий В1 и В2, обеспечивающий максимальную прибыль, если изделие В1 дает прибыль в 5 рублей, а изделие В2 - 15 рублей.

### Задача 2.

	В <sub>1</sub>	В <sub>2</sub>	В <sub>3</sub>	В <sub>4</sub>	запасы
А <sub>1</sub>	3	4	6	5	50
А <sub>2</sub>	6	3	7	6	50
А <sub>3</sub>	10	5	2	2	230
потребности	100	60	40	130	

### Вариант 4.

**Задача 1.** На четырех станках обрабатывается два вида изделий В1 и В2. Изделие В1 требует обработки на станках 5; 2; 0; 1 единиц времени, соответственно. Изделие В2 - 0; 7; 1; 2 единиц времени. Фонд полезного времени работы станков - 70, 63, 8 и 20 единиц времени. Составить план производства изделий, обеспечивающий максимальную загрузку станков.

### Задача 2.

	В <sub>1</sub>	В <sub>2</sub>	В <sub>3</sub>	В <sub>4</sub>	запасы
А <sub>1</sub>	5	2	1	6	200
А <sub>2</sub>	6	2	4	4	130
А <sub>3</sub>	9	2	3	7	70
потребности	160	140	40	60	

### Вариант 5.

**Задача 1.** Для изготовления двух видов соков используются слива, черника, клубника. Общее количество сливы - 300 кг, черники - 270 кг, клубники - 400 кг. На сок 1-го вида идет каждого вида, соответственно 2, 1, 4 кг, на сок 2-го вида, соответственно, 3, 3, 1 кг. Найти оптимальный план производства двух видов соков, обеспечивающий максимальную прибыль производства, если цена одной банки сока 1-го вида равна 25 рублей, а 2-го вида – 45 рублей.

#### Задача 2.

	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>	запасы
A <sub>1</sub>	1	2	3	1	210
A <sub>2</sub>	3	4	2	4	10
A <sub>3</sub>	5	7	6	3	40
потребности	140	40	30	50	

### Вариант 6.

**Задача 1.** На участке цеха три группы оборудования: токарное, фрезерное, сверлильное. Единица изделия вида А обрабатывается на каждом станке 3, 4, 2 часа соответственно. Единица изделия вида Б обрабатывается 4, 3, 2 часа. Фонд полезного времени работы токарного оборудования - 40 часов, фрезерного - 36 часов, сверлильного - 20 часов. Рассчитать план выпуска изделий, обеспечивающий максимальную загрузку оборудования.

#### Задача 2.

	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	запасы
A <sub>1</sub>	4	5	2	30
A <sub>2</sub>	3	1	3	170
A <sub>3</sub>	2	7	6	40
A <sub>4</sub>	3	3	1	60
потребности	100	150	90	

### Вариант 7.

**Задача 1.** На участке цеха имеется три группы оборудования: токарное, фрезерное, шлифовальное. Единица изделия вида А обрабатывается на каждом станке 2, 1, 0 часов соответственно. Единица изделия вида Б обрабатывается 2, 2, 4 ч. Фонд полезного времени токарного - 14 час., фрезерного – 11 час., шлифовального – 20 час. Рассчитать план выпуска изделий, обеспечивающий максимальную загрузку оборудования.

#### Задача 2.

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	запасы
$A_1$	1	5	4	100
$A_2$	5	1	5	120
$A_3$	4	7	5	80
$A_4$	7	3	5	10
потребности	40	70	200	

### Вариант 8.

**Задача 1.** Трикотажная фабрика использует для производства свитеров и кофточек чистую шерсть, силон и нитрон, запас которых составляет, соответственно, 900, 400 и 300 кг. Количество пряжи каждого вида (кг), необходимой для изготовления одного свитера – 0,4; 0,2 и 0,1 соответственно, для одной кофточки – 0,3; 0,1 и 0,1 кг. Составить план производства изделий, обеспечивающий получение максимальной прибыли, если прибыль от реализации свитера и кофточки 600 руб. и 500 руб. соответственно.

#### Задача 2.

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	запасы
$A_1$	1	4	7	70
$A_2$	3	6	3	130
$A_3$	4	8	12	80
$A_4$	1	5	9	180
потребности	130	60	270	

### Вариант 9.

**Задача 1.** Макаaronная фабрика производит два вида изделий А и Б, используя три вида сырья: муку, яйца, соль. Общие запасы каждого вида сырья соответственно равны 3000, 252, 120. Нормы расхода сырья на ед. веса изделий А - 120, 3, 4; на ед. веса изделий Б - 40, 12, 4. Составить план производства, обеспечивающий максимальную прибыль, если ед. веса изделий А дает прибыль 300 руб., а Б - 400 рублей.

#### Задача 2.

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	запасы
$A_1$	1	4	3	85
$A_2$	5	5	4	85
$A_3$	2	4	7	70
$A_4$	2	3	5	60
потребности	170	80	50	

### Вариант 10.

**Задача 1.** В кондитерской для изготовления двух видов булок  $B_1$  и  $B_2$  используются мука, яйцо (шт.), сахар, маргарин. На изготовление булки  $B_1$  идет каждого вида сырья, соответственно: 1; 2; 0; 0,3 ед. продуктов, а на изготовление  $B_2$ , соответственно: 1; 4; 0,5; 0,4 ед. продуктов. Общие запасы муки составляют 40 кг, яйца - 100 штук, сахара - 10 кг, маргарина - 12 кг. Прибыль от реализации одной булки  $B_1$  - 10 руб., а от одной булки  $B_2$  - 20 руб. Составить оптимальный план производства булок, обеспечивающий максимальную прибыль.

#### Задача 2.

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	запасы
$A_1$	1	3	4	25
$A_2$	9	5	2	75
$A_3$	3	4	5	120
$A_4$	5	7	2	80
потребности	105	115	80	

## Методические указания к решению задач

**Задача 1.** Для изготовления двух видов изделий I и II используются три вида сырья. На производство единицы изделия I требуется затратить сырья первого вида 13 кг, сырья второго вида – 32 кг, сырья третьего вида – 58 кг. На производство единицы изделия II требуется затратить сырья первого вида 24 кг, сырья второго вида – 32 кг, сырья третьего вида – 29 кг. Производство обеспечено сырьем первого вида в количестве 312 кг, сырьем второго вида – 480 кг, сырьем третьего вида – 696 кг. Прибыль от реализации единицы готового изделия I вида составляет 4 усл. ед, а изделия II вида – 3 усл. ед.

Требуется составить план производства изделий I и II, обеспечивающий максимальную прибыль от их реализации, если заранее планируется изготовление не менее 10 единиц изделий I и II.

**Решение:** Для удобства оформим данные задачи в таблице.

Вид сырья	Кол-во затрачиваемого сырья на единицу изделия		Общее кол-во сырья
	A	B	
S <sub>1</sub>	12	4	300
S <sub>2</sub>	4	4	120
S <sub>3</sub>	3	12	252
Прибыль (усл. ед)	30	40	

Составим математическую модель задачи.

1. Введем переменные задачи:

$x_1$  – количество изделий вида I, планируемых к выпуску;

$x_2$  – количество изделий вида II, планируемых к выпуску.

2. Составим систему ограничений:

$$\begin{cases} 13x_1 + 24x_2 \leq 312, & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 32x_1 + 32x_2 \leq 480, & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 58x_1 + 29x_2 \leq 696, & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 10, & (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 \geq 0, & x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3. Зададим целевую функцию:

$$F(X) = 4x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

Построим область допустимых решений задачи.

Для этого в прямоугольной декартовой системе координат построим прямую  $l_1: 13x_1 + 24x_2 = 312$ , соответствующую ограничению (1). Для этого найдем координаты двух точек, принадлежащих данной прямой. Полагаем  $x_1 = 0$ , тогда  $x_2 = 13$ , возьмем  $x_2 = 0$ , получаем  $x_1 = 24$ . Получили координаты точек  $B(24, 0)$  и  $C(0, 13)$ .

Определим, какая из двух полуплоскостей, на которые эта прямая делит всю координатную плоскость, является областью решений неравенства (1). Для этого подставим, например, координаты точки  $O(0; 0)$ , не лежащей на прямой  $l_1$ , в данное ограничение:

$13 \cdot 0 + 24 \cdot 0 \leq 312$ . Получаем  $0 \leq 312$ , следовательно, точка  $O$  лежит в полуплоскости решений. Укажем данную полуплоскость штриховкой (рис.1).

рис. 1

Аналогично строим прямую  $l_2: 32x_1 + 32x_2 = 480$ , соответствующую ограничению (2), находим полуплоскость решений. Отметим штриховкой общую часть полуплоскостей решений (рис. 2).

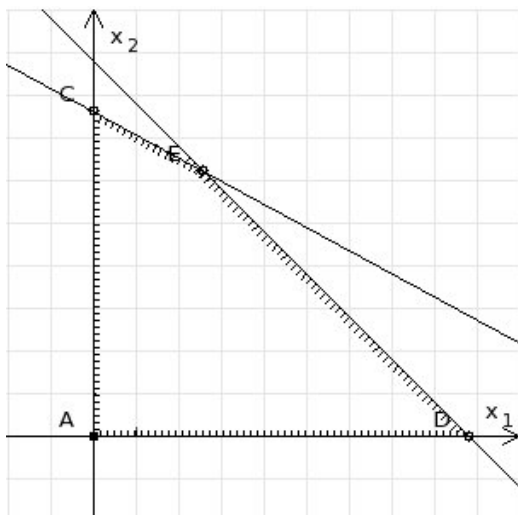


рис. 2

Строим прямую  $l_3: 58x_1 + 29x_2 = 696$ , соответствующую ограничению (3), находим полуплоскость решений. Штриховкой обозначим общую часть полуплоскостей решений (рис. 3).

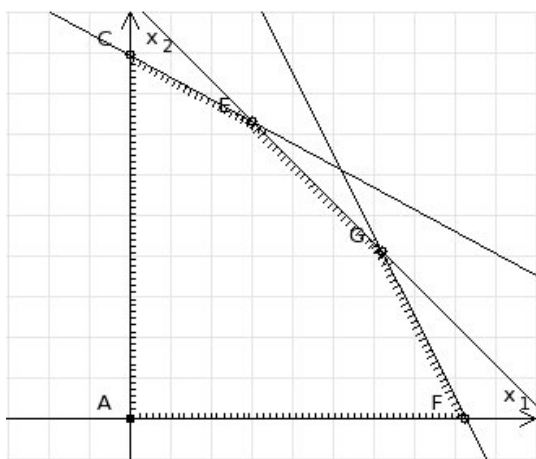


рис. 3

Построим прямую  $l_4: x_1 + x_2 = 10$ . Определим, какая из двух полуплоскостей, на которые эта прямая делит всю координатную плоскость, является областью решений неравенства (4). Для этого подставим, например, координаты точки  $O(0; 0)$ , не лежащей на прямой  $l_4$ , в данное ограничение.

Получаем  $0 \geq 10$ , следовательно точка  $O$  не принадлежит полуплоскости решений. Штрихуем ту часть плоскости относительно прямой, где не лежит точка  $O$ .

Далее находим общую часть полуплоскостей решений, учитывая при этом условия неотрицательности переменных. Полученную область допустимых решений отметим штриховкой (рис. 4).

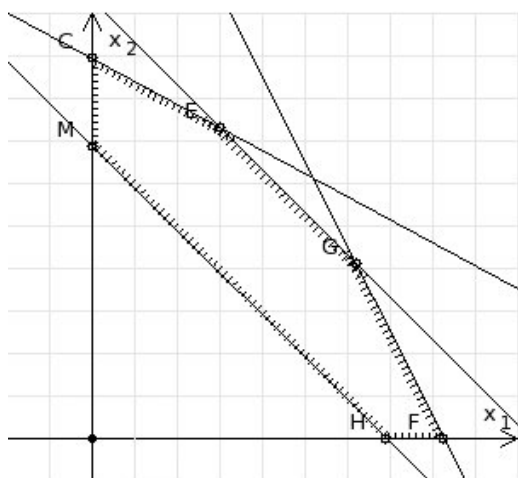


рис. 4

Построим нормаль линий уровня  $\vec{c} = (4; 3)$  и одну из линий, например  $4x_1 + 3x_2 = 0$ .

Так как решается задача нахождение максимума целевой функции, то линию уровня перемещаем в направлении нормали до последней точки многоугольника решений  $MCEGF$  (рис. 5).

рис. 5

Видим, что последней точкой данного прямоугольника будет точка  $G$ . В данной точке значение функции будет наибольшим.

Для нахождения координат точки  $G = l_2 \cap l_3$  необходимо решить систему уравнений

$$\begin{cases} 32x_1 + 34x_2 = 480, \\ 58x_1 + 29x_2 = 696 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 32x_1 + 34x_2 = 480, \\ 58x_1 + 29x_2 = 696 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 15, \\ 2x_1 + x_2 = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 15 - x_1, \\ 2x_1 + 15 - x_1 = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 15 - x_1, \\ x_1 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 6, \\ x_1 = 9 \end{cases}$$

Получим  $G(9, 6)$ .

Находим  $F(G) = 4 \cdot 9 + 3 \cdot 6 = 54$ .

Ответ: Для получения максимальной прибыли 54 усл. ед, необходимо производить 9 изделий вида I и 6 изделий вида II.

**Задача 2.** Четыре предприятия данного экономического района для производства продукции использует три вида сырья. Потребности в сырье каждого из предприятий соответственно равны 120, 50, 190 и 110 ед. Сырье сосредоточено в трех местах его получения, а запасы соответственно равны 160, 140, 170 ед. На каждое из предприятий сырье может завозиться из любого пункта его получения. Тарифы перевозок

являются известными величинами и задаются матрицей  $C = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 9 \\ 9 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Составить такой план перевозок, при котором общая себестоимость перевозок является минимальной.

**Решение:**

	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>	
A <sub>1</sub>	7	8	1	2	160
A <sub>2</sub>	4	5	9	8	140
A <sub>3</sub>	9	2	3	6	170
	120	50	190	110	470

$\sum_{j=1}^m b_j = \sum_{i=1}^n a_i$  — задача закрытого типа.

Составим первый план транспортной задачи методом северо-западного угла. Заполнение клеток таблицы начнем с левой верхней клетки.

	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>	
A <sub>1</sub>	7 120	8 40	1	2	160
A <sub>2</sub>	4	5 10	9 130	8	140
A <sub>3</sub>	9	2	3 60	6 110	170
	120	50	190	110	470

$$X_1 = \begin{pmatrix} 20 & 40 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 130 & 0 \\ 0 & 0 & 60 & 110 \end{pmatrix}, S_1 = 120 \cdot 7 + 40 \cdot 8 + 10 \cdot 5 + 130 \cdot 9 + 60 \cdot 3 + 110 \cdot 6 = 3120$$

Составим первый план методом минимальной стоимости. Будем заполнять клетки с минимальными тарифами.

	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>	
A <sub>1</sub>	7	8	1	2	160
			160		
A <sub>2</sub>	4	5	9	8	140
	120			20	
A <sub>3</sub>	9	2	3	6	170
		50	30	90	
	120	50	190	110	470

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 160 & 0 \\ 120 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 50 & 30 & 90 \end{pmatrix}$$

$$S_2 = 160 \cdot 1 + 120 \cdot 4 + 20 \cdot 8 + 50 \cdot 2 + 30 \cdot 3 + 90 \cdot 6 = 1530$$

Стоимость при таком плане перевозок почти в два раза меньше. Начнем решение задачи с этого плана. Проверим его на оптимальность. Введем потенциалы  $\alpha_i$  – соответственно отправления,  $\beta_j$  – соответственно назначения. По занятым клеткам составляем систему уравнений  $\alpha_i + \beta_j = c_{ij}$ :

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_3 = 1, & \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 + \beta_1 = 4, & \beta_3 = 1 \\ \alpha_2 + \beta_4 = 8, & \beta_4 = 2 \\ \alpha_3 + \beta_2 = 2, & \alpha_2 = 6 \\ \alpha_3 + \beta_3 = 3, & \beta_1 = -2 \\ \alpha_3 + \beta_4 = 6, & \alpha_3 = 2 \\ \beta_2 = 0 \end{cases}$$

Для свободных клеток таблицы проверяем критерий оптимальности  $u_i + v_j \leq c_{ij}$ .

$$\text{Будем составлять разности } D_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}.$$

$$D_{11} = 0 + 0 - 7 < 0$$

$$D_{12} = 0 + 0 - 8 < 0$$

$$D_{14} = 0 + 4 - 2 = 2 > 0$$

$$D_{22} = 4 + 0 - 5 < 0$$

$$D_{23} = 4 + 1 - 9 < 0$$

$$D_{31} = 2 + 0 - 9 < 0$$

План не оптимальный т. к. имеется положительная оценка  $D_{14} = 2$ .

Построим из неё цикл пересчета. Это ломаная линия звеньев, которые расположены строго по вертикали или горизонтали, а вершины находятся в занятых клетках. В плохой клетке поставим знак (+). В остальных вершинах знаки чередуются. Из отрицательных вершин выбираем наименьшее число и сдвигаем его по циклу. Перешли к новому опорному плану.

	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>	
A <sub>1</sub>	7	8	1 (-)	2 (+)	160
A <sub>2</sub>	4	5	9	8	140
A <sub>3</sub>	9	2	3 (+)	6	170
	120	50	190	110	470

	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>	
A <sub>1</sub>	7	8	1 (-)	2 (+)	160
			70	90	

A <sub>2</sub>	4	5	9	8	140
	120	(+)		(-)	20
A <sub>3</sub>	9	2	3	6	170
		(-)	(+)		120
	120	50	190	110	470

$$X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 70 & 90 \\ 120 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 50 & 120 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_3 = 70 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + 120 \cdot 4 + 20 \cdot 8 + 50 \cdot 2 + 120 \cdot 3 = 1350$$

Стоимость перевозок меньше, т.е. план улучшили. Проверяем теперь новый план на оптимальность. По занятым клеткам:

$$\begin{aligned} u_1 + v_3 &= 1, & u_1 &= 0 \\ u_1 + v_4 &= 2, & v_4 &= 2 \\ u_2 + v_4 &= 8, & u_2 &= 6 \\ u_3 + v_2 &= 2, & u_3 &= 2 \\ u_3 + v_3 &= 3, & v_3 &= 1 \\ u_2 + v_1 &= 4, & v_1 &= -2 \\ v_2 &= 0 \end{aligned}$$

По свободным клеткам:

$$D_{11} = 0 - 2 - 7 < 0$$

$$D_{12} = 0 + 0 - 8 < 0$$

$$D_{22} = 0 + 6 - 5 = 1 > 0$$

$$D_{23} = 6 + 1 - 9 < 0$$

$$D_{31} = 2 - 2 - 9 < 0$$

$$D_{34} = 2 + 2 - 6 < 0$$

План не оптимальный т. к. имеется положительная оценка  $D_{22} = 1$ .

Строим цикл пересчета и переходим к новому плану.

	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>	
--	----------------	----------------	----------------	----------------	--

	7	8	1	2	
A <sub>1</sub>			50	110	160
A <sub>2</sub>	4	5	9	8	140
	120	20			
A <sub>3</sub>	9	2	3	6	170
	30	140			
	120	50	190	110	470

$$X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 & 110 \\ 120 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 140 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_4 = 50 \cdot 1 + 110 \cdot 2 + 120 \cdot 4 + 20 \cdot 5 + 30 \cdot 2 + 140 \cdot 3 = 1330$$

Проверяем новый план на оптимальность.

По занятым клеткам:

$$\begin{aligned} i & u_1 + v_3 = 1, \quad v_3 = 1 \\ ii & u_1 + v_4 = 2, \quad v_4 = 2 \\ iii & u_2 + v_1 = 4, \quad v_1 = -1 \\ iv & u_2 + v_2 = 5, \quad u_2 = 5 \\ v & u_3 + v_2 = 2, \quad v_2 = 0 \\ vi & u_3 + v_3 = 3, \quad u_3 = 2 \\ vii & u_1 = 0 \end{aligned}$$

По свободным клеткам:

$$D_{11} = 0 - 1 - 7 < 0$$

$$D_{12} = 0 + 0 - 8 < 0$$

$$D_{23} = 5 + 1 - 9 < 0$$

$$D_{24} = 5 + 2 - 8 < 0$$

$$D_{31} = 2 - 1 - 9 < 0$$

$$D_{34} = 2 + 2 - 6 < 0$$

Критерий оптимальности выполнен, т. е. последний план оптимальный.

Ответ:

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 & 110 \\ 120 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 140 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_{\min} = 1330.$$