МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный экономический университет»

Одобрена на заседании кафедры	**Утверждена** Советом по учебно-методическим вопросам и качеству образования
09.12.2025 г.	16 декабря 2025 г.
протокол № 12	протокол № 4
И.о.зав. кафедрой Кольева Н.С.	Председатель Карх Д.А. *(подпись)*

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Наименование дисциплины	Методы оптимизации и моделирование экономических систем
Направление подготовки	09.03.03 Прикладная информатика
Профиль	Инжиниринг предприятий и информационных систем
Форма обучения	заочная
Год набора	2026

Разработана:
Доцент, к.ф.-м.н.
Сазанова Л.А.

Екатеринбург
2025 г.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Рабочая программа дисциплины является частью основной профессиональнойобразовательной программы высшего образования - программы бакалавриата, разработанной всоответствии с ФГОС ВО

ФГОС ВО	Федеральный государственный образовательный стандарт высшего образования- бакалавриат по направлению подготовки 09.03.03 Прикладная информатика(приказ Минобрнауки России от 19.09.2017 г. №

1. ЦЕЛЬ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Целью освоения дисциплины является формирование у студентов теоретических ипрактических знаний в области создания и использования оптимизационных экономическихмоделей, постановок и решения задач математического программирования и сетевого планирования.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП

Дисциплина относится к обязательной части учебного плана.

3. ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ

Промежуточнаяаттестация	Часов					З.е.
	Всего засеместр	Контактная работа .(поуч.зан.)			Самостоятельная работа в том числеподготовкаконтрольных икурсовых	
		Всего	Лекции	Лабораторные		
Семестр 6						
Зачет с оценкой,Контрольная работа	144	16	8	8	124	4

4.ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОСВОЕНИЯ ОПОП

В результате освоения ОПОП у выпускника должны быть сформированы компетенции,установленные в соответствии ФГОС ВО.

Шифр и наименованиекомпетенции	Индикаторы достижения компетенций
ОПК-1 Способен применятьестественнонаучные иобщеинженерные знания,методы математическогоанализа и моделирования,теоретического иэкспериментальногоисследования впрофессиональнойдеятельности;	ИД-1.ОПК-1 Знать: основы высшей математики, физики, основывычислительной техники и программирования.

ОПК-1 Способен применятьестественнонаучные иобщеинженерные знания,методы математическогоанализа и моделирования,теоретического иэкспериментальногоисследования впрофессиональнойдеятельности;	ИД-2.ОПК-1 Уметь: решать стандартные профессиональные задачи сприменением естественнонаучных и общеинженерных знаний,методов математического анализа и моделирования.
	ИД-3.ОПК-1 Иметь практический опыт: теоретического иэкспериментального исследования объектов профессиональнойдеятельности
ОПК-6 Способенанализировать иразрабатыватьорганизационно-технические иэкономические процессы сприменением методовсистемного анализа иматематическогомоделирования;	ИД-1.ОПК-6 Знать: основы теории систем и системного анализа,дискретной математики, теории вероятностей и математическойстатистики, методов оптимизации и исследования операций, нечеткихвычислений, математического и имитационного моделирования.
	ИД-2.ОПК-6 Уметь: применять методы теории систем и системногоанализа, математического, статистического и имитационногомоделирования для автоматизации задач принятий решений, анализаинформационных потоков, расчета экономической эффективности инадежности информационных систем и технологий.
	ИД-3.ОПК-6 Иметь практический опыт: проведения инженерныхрасчетов основных показателей результативности создания иприменения информационных систем и технологий

5. ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН

Тема	Часов

	Наименование темы	Всего часов	Контактная работа .(по уч.зан.)			Самост.работа	Контрольсамостоятельной работы
			Лекции	Лабораторные	Практическиезанятия		
Семестр 6		14					
Тема 1.	Примеры постановок оптимизационныхзадач. Общая и основная задачилинейного	28	3	3		22	
Тема 2.	Симплекс-метод решения задачлинейного программирования.Двойственная задача	25	1	2		22	
Тема	Транспортная задача.	21	1	2		18	
Тема 4.	Сетевые методы решенияоптимизационных	21	2	1		18	
Тема 5.	Использование методов оптимизации длярешения задач теории	45	1			44	

6. ФОРМЫ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ШКАЛЫ ОЦЕНИВАНИЯ

Раздел/Тема	Вид оценочногосред	Описание оценочного средства	Критериииоценивания
Текущий контроль (Приложение 4)			
Темы 1-2	Контрольнаяработа(приложение 4)	Контрольная работа №1 состоит из 2вариантов по 3 задания	10 баллов
Темы 3-4	Контрольнаяработа(приложение 4)	Контрольная работа №2 состоит из 2вариантов по 2 задания	10 баллов
Тема 5	Тест	Тест состоит из 12 вопросов	10 баллов
Промежуточная аттестация(Приложение 5)			
6 семестр(За	Билет для зачета	Билет состоит из 1 теоретического вопроса и1 практического задания	100 баллов

ОПИСАНИЕ ШКАЛ ОЦЕНИВАНИЯ

Показатель оценки освоения ОПОП формируется на основе объединения текущего контроляи промежуточной аттестации обучающегося.

Показатель рейтинга по каждой дисциплине выражается в процентах, который показываетуровень подготовки студента.

Текущий контроль.Используется 100-балльная система оценивания. Оценка работы студента втечении семестра осуществляется преподавателем в соответствии с разработанной им системойоценки учебных достижений в процессе обучения по данной дисциплине.

В рабочих программах дисциплин и практик закреплены виды текущего контроля,планируемые результаты контрольных мероприятий и критерии оценки учебный достижений.

В течение семестра преподавателем проводится не менее 3-х контрольных мероприятий, пооценке деятельности студента. Если посещения занятий по дисциплине включены в рейтинг, тоданный показатель составляет не более 20% от максимального количества баллов по дисциплине.

Промежуточная аттестация. Используется 5-балльная система оценивания. Оценка работыстудента по окончанию дисциплины (части дисциплины) осуществляется преподавателем всоответствии с разработанной им системой оценки достижений студента в процессе обучения поданной дисциплине. Промежуточная аттестация также проводится по окончанию формированиякомпетенций.

Порядок перевода рейтинга, предусмотренных системой оценивания, по дисциплине, впятибалльную систему.

Высокий уровень – 100% - 70% - отлично, хорошо.

Средний уровень – 69% - 50% - удовлетворительно.

Показатель оценки	**По 5-балльной системе**	**Характеристика показателя**
100% - 85%	отлично	обладают теоретическими знаниями в полном объеме,понимают, самостоятельно умеют применять,исследовать, идентифицировать, анализировать,систематизировать, распределять по категориям,рассчитать показатели, классифицировать,разрабатывать модели, алгоритмизировать, управлять,организовать, планировать процессы исследования,осуществлять оценку результатов на высоком уровне
84% - 70%	хорошо	обладают теоретическими знаниями в полном объеме,понимают, самостоятельно умеют применять,исследовать, идентифицировать, анализировать,систематизировать, распределять по категориям,рассчитать показатели, классифицировать,разрабатывать модели, алгоритмизировать, управлять,организовать, планировать процессы исследования,осуществлять оценку результатов. Могут быть допущены недочеты, исправленныестудентом самостоятельно в процессе работы (ответаи т.д.)
69% - 50%	удовлетворительно	обладают общими теоретическими знаниями, умеютприменять, исследовать, идентифицировать,анализировать, систематизировать, распределять покатегориям, рассчитать показатели,классифицировать, разрабатывать модели,алгоритмизировать, управлять, организовать,планировать процессы исследования, осуществлятьоценку результатов на среднем уровне. Допускаются ошибки, которые студент затрудняетсяисправить самостоятельно.
49 % и менее	неудовлетворительно	обладают не полным объемом общих теоретическимизнаниями, не умеют самостоятельно применять,исследовать, идентифицировать, анализировать,систематизировать, распределять по категориям,рассчитать показатели, классифицировать,разрабатывать модели, алгоритмизировать, управлять,организовать, планировать процессы исследования,осуществлять оценку результатов. Не сформированы умения и навыки для
100% - 50%	зачтено	характеристика показателя соответствует «отлично»,«хорошо», «удовлетворительно»
49 % и менее	не зачтено	характеристика показателя соответствует«неудовлетворительно»

7. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

7.1. Содержание лекций

Тема 1. Примеры постановок оптимизационных задач. Общая и основная задачи линейногопрограммирования. Графический метод решения. (ОПК-1) Методология экономико-математического и компьютерного моделирования. Математические методыоптимизации. Примеры оптимизационных задач экономико-математического моделирования: задачапланирования производства продукции, задача о составлении оптимального рациона, задача ораскрое материала, задача о назначениях. Линейное программирование как часть математическогопрограммирования. Понятие изменяемых переменных, области допустимых значений, ограниченийиодели, целевой функции. Постановки общей и основной (канонической) задач линейногопрограммирования. Переход от общей задачи к основной Реализация графического метода решения задачи линейного программирования.
Тема 2. Симплекс-метод решения задач линейного программирования. Двойственная задачалинейного программирования. Алгоритм симплекс-метода решения общей задачи линейного программирования. Методыискусственного базиса. Реализация метода программными средствами.
Тема 3. Транспортная задача. Постановка транспортной задачи. Понятие открытой и закрытой транспортной задачи. Методынахождения первого допустимого базисного решения. Метод потенциалов решения транспортнойзадачи.
Тема 4. Сетевые методы решения оптимизационных задач (ОПК-6) Понятие о сетевых задачах. Постановка задачи минимизации сети для конечных сетей. Общая схемарешения задачи минимизации сети методом построения связных и несвязных множеств.Формализованный алгоритм решения задачи минимизации сети методом построения связных инесвязных множеств. Постановка задачи минимизации пути для конечных сетей. Общая схемарешения задачи минимизации пути для конечных сетей итерационным методом. Примерыэкономических ситуаций применения метода. Введение в метод сетевого планирования и управления (СПУ). Структурное планирование илисетевое представление проектов (программ). Расчет сетевой модели. Алгоритм определениякритического пути и критического времени в сетевой модели проекта в методе СПУ. Определениерезервов времени в методе СПУ.
Тема 5. Использование методов оптимизации для решения задач теории оптимального управления итеории игр. Краткая история появления и развития дисциплин Математическая теория оптимального управленияи Теория игр. Основная терминология. Постановка задачи оптимального управления длянепрерывного процесса. Постановка задачи оптимального управления для дискретного процесса.Задача о быстродействии. Примеры игровых задач в управлении. Оптимизационные моделиэкономической динамики

7.2 Содержание практических занятий и лабораторных работ

Тема 2. Симплекс-метод решения задач линейного программирования. Двойственная задачалинейного программирования. Алгоритм симплекс-метода решения общей задачи линейного программирования. Методыискусственного базиса. Реализация метода программными средствами. Постановка двойственной задачи линейного программирования. Соотношения междуоптимальными решениями прямой и двойственной задач. Экономическая интерпретациядвойственной задачи.
Тема 3. Транспортная задача. Постановка транспортной задачи. Понятие открытой и закрытой транспортной задачи. Методынахождения первого допустимого базисного решения. Метод потенциалов решения транспортнойзадачи. Задача о назначениях как транспортная модель. Модификации транспортных задач.
Тема 4. Сетевые методы решения оптимизационных задач (ОПК-6) Понятие о сетевых задачах. Постановка задачи минимизации сети для конечных сетей. Общая схемарешения задачи минимизации сети методом построения связных и несвязных множеств.Формализованный алгоритм решения задачи минимизации сети методом построения связных инесвязных множеств. Постановка задачи минимизации пути для конечных сетей. Общая схемарешения задачи минимизации пути для конечных сетей итерационным методом. Примерыэкономических ситуаций применения метода.

7.3. Содержание самостоятельной работы

Тема 2. Симплекс-метод решения задач линейного программирования. Двойственная задачалинейного программирования. Изучение основной и дополнительной литературы по теме. Разбор практических примеров.Выполнение практических работ. Подготовка к лабораторным занятиям.
Тема 3. Транспортная задача. Изучение основной и дополнительной литературы по теме. Разбор практических примеров.Выполнение практических работ. Подготовка к лабораторным занятиям.
Тема 4. Сетевые методы решения оптимизационных задач (ОПК-6) Изучение основной и дополнительной литературы по теме. Разбор практических примеров.Выполнение практических работ. Подготовка к лабораторным занятиям.
Тема 5. Использование методов оптимизации для решения задач теории оптимального управления итеории игр. Изучение основной и дополнительной литературы по теме. Разбор практических примеров.Выполнение практических работ. Подготовка к лабораторным занятиям.

7.3.1. Примерные вопросы для самостоятельной подготовки к зачету/экзамену
Приложение 1

7.3.2. Практические задания по дисциплине для самостоятельной подготовки кзачету/экзамену
Приложение 2

7.3.3. Перечень курсовых работ
Не предусмотрено.

7.4. Электронное портфолио обучающегося
Размещается контрольная работа

7.5. Методические рекомендации по выполнению контрольной работы
Приложение 6

7.6 Методические рекомендации по выполнению курсовой работы
Не предусмотрено.

8. ОСОБЕННОСТИ ОРГАНИЗАЦИИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ ДЛЯ ЛИЦ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ЗДОРОВЬЯ

По заявлению студента

В целях доступности освоения программы для лиц с ограниченными возможностями здоровья при необходимости кафедра обеспечивает следующие условия:

- особый порядок освоения дисциплины, с учетом состояния их здоровья;
- электронные образовательные ресурсы по дисциплине в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья;
- изучение дисциплины по индивидуальному учебному плану (вне зависимости от формы обучения);
- электронное обучение и дистанционные образовательные технологии, которые предусматривают возможности приема-передачи информации в доступных для них формах.
- доступ (удаленный доступ), к современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам, состав которых определен РПД.

9. ПЕРЕЧЕНЬ ОСНОВНОЙ И ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ, НЕОБХОДИМОЙ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Сайт библиотеки УрГЭУ
http://lib.usue.ru/

Основная литература:

2. Васильев Ф. П., Потапов М. М., Будак Б. А., Артемьева Л. А. Методы оптимизации[Электронный ресурс]:учебник и практикум для вузов. - Москва: Юрайт, 2024. - 375 – Режимдоступа: https://urait.ru/bcode/536292

3. Кочегурова Е. А. Теория и методы оптимизации [Электронный ресурс]:учебное пособиедля вузов. - Москва: Юрайт, 2024. - 133 – Режим доступа: https://urait.ru/bcode/537114

4. Кудрявцев К. Я., Прудников А. М. Методы оптимизации [Электронный ресурс]:учебноепособие для вузов. - Москва: Юрайт, 2024. - 140 – Режим доступа: https://urait.ru/bcode/541315

5. Кремер Н. Ш., Путко Б. А., Тришин И. М., Фридман М. Н. Исследование операций вэкономике [Электронный ресурс]:учебник для вузов. - Москва: Юрайт, 2024. - 414 – Режим доступа:https://urait.ru/bcode/535489

6. Кремер Н. Ш., Путко Б. А., Тришин И. М., Фридман М. Н. Исследование операций вэкономике [Электронный ресурс]:учебник для вузов. - Москва: Юрайт, 2025. - 414 – Режим доступа:https://urait.ru/bcode/559655

7. Гончаров В. А. Методы оптимизации [Электронный ресурс]:учебник для вузов. - Москва:Юрайт, 2025. - 191 – Режим доступа: https://urait.ru/bcode/559424

Дополнительная литература:

2. Лемешко Б. Ю. Теория игр и исследование операций [Электронный ресурс]:Учебноепособие. - Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет (НГТУ), 2013. -167 с. – Режим доступа: https://znanium.com/catalog/product/558878

3. Хуснутдинов Р. Ш. Экономико-математические методы и модели [Электронныйресурс]:Учебное пособие. - Москва: ООО "Научно-издательский центр ИНФРА-М", 2020. - 224 –Режим доступа: https://znanium.com/catalog/product/1039180

4. Аттетков А.В., Зарубин В.С. Методы оптимизации [Электронный ресурс]:Учебное пособие.- Москва: Издательский Центр РИО�, 2019. - 270 – Режим доступа:https://znanium.com/catalog/product/1002733

5. Гетманчук А.В., Ермилов М.М. Экономико-математические методы и модели[Электронный ресурс]:Учебное пособие. - Москва: Издательско-торговая корпорация "Дашков и К",2018. - 186 с. – Режим доступа: https://znanium.com/catalog/product/1093144

6. Куликова О. В., Кныш А. А. Приложение информационных технологий для решения задачоптимизации в экономике [Электронный ресурс]:электронный учебник. - Екатеринбург: [б. и.], 2019.- 1 – Режим доступа: http://lib.usue.ru/resource/limit/ump/19/e496.pdf

7. Власов М. П., Шимко П.Д. Моделирование экономических систем и процессов[Электронный ресурс]:Учебное пособие. - Москва: ООО "Научно-издательский центр ИНФРА-М",2019. - 336 – Режим доступа: https://znanium.com/catalog/product/983584

10. ПЕРЕЧЕНЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, ВКЛЮЧАЯ ПЕРЕЧЕНЬ ЛИЦЕНЗИОННОГО ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ И ИНФОРМАЦИОННЫХ СПРАВОЧНЫХ СИСТЕМ, ОНЛАЙН КУРСОВ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ПРИ ОСУЩЕСТВЛЕНИИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Перечень лицензионного программного обеспечения:

Microsoft Windows 10 .Договор № 52/223-ПО/2020 от 13.04.2020, Акт № Tr000523459 от 14.10.2020. Срок действия лицензии -Без ограничения срока.

Microsoft Office 2016.Договор № 52/223-ПО/2020 от 13.04.2020, Акт № Tr000523459 от 14.10.2020 Срок действия лицензии -Без ограничения срока.

Astra Linux Common Edition. Договор №0417-ПО/2019 от 08.05.2019, Акт №Sk000343 от 24.05.2019 и Контракт № 35-У/2018 от 13.06.2018, Акт № УТ213 от 17.12.2018. Срок действия лицензии - без ограничения срока.

МойОфис стандартный. Соглашение № СК-281 от 7 июня 2017. Дата заключения - 07.06.2017. Срок действия лицензии - без ограничения срока.

Libre Office. Лицензия GNU LGPL. Срок действия лицензии - без ограничения срока.

CorelDRAW Graphics Suite X8. Договор № 34-С 2017 от 27.03.2017, Акт № Tr007267 от 24.01.2020. Срок действия лицензии -бессрочное пользование.

Перечень информационных справочных систем, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:

Справочно-правовая система Консультант +. Договор № 143/223-У/2025 от 02.12.2025 Срок действия лицензии до 31.12.2026

Онлайн курс «Технологии управления бизнесом (часть 1: Математические методы в экономике)»

https://openedu.ru/course/spbstu/BUSMAT/

11. ОПИСАНИЕ МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЙ БАЗЫ, НЕОБХОДИМОЙ ДЛЯ ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Реализация учебной дисциплины осуществляется с использованием материально-технической базы УрГЭУ, обеспечивающей проведение всех видов учебных занятий и научно-исследовательской и самостоятельной работы обучающихся:

Специальные помещения представляют собой учебные аудитории для проведения всех видов занятий, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду УрГЭУ.

Все помещения укомплектованы специализированной мебелью и оснащены мультимедийным оборудованием спецоборудованием (информационно-телекоммуникационным, иным компьютерным), доступом к информационно-поисковым, справочно-правовым системам, электронным библиотечным системам, базам данных действующего законодательства, иным информационным ресурсам служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Для проведения занятий лекционного типа презентации и другие учебно-наглядные пособия, обеспечивающие тематические иллюстрации.

Приложение 1
к рабочей программе

7.3.1. Примерные вопросы для самостоятельной подготовки к зачету

К зачету:

1.Примеры экономико-математического моделирования: задачи планирования объемов производства, сетевые задачи.

2. Предмет математического программирования. Содержание, основные разделы и область применения математического программирования.

3.Постановка общей и основной задач линейного программирования (ЛП). Графический метод решения задач ЛП.

4.Симплекс-метод решения общей задачи ЛП.

5.Метод искусственного базиса решения задачи ЛП.

6.Двойственная задача ЛП. Экономическая интерпретация двойственной задачи ЛП.

7.Постановка транспортной задачи. Методы нахождения начального решения транспортной задачи.

8.Метод потенциалов решения транспортной задачи.

9. Модификации транспортных задач.

10. Постановка задачи минимизации сети для конечных сетей.

11. Общая схема решения задачи минимизации сети методом построения связных и несвязных множеств.

12. Постановка задачи минимизации пути для конечных сетей.

13. Общая схема решения задачи минимизации пути для конечных сетей итерационным методом.

14. Алгоритм решения задачи минимизации пути для конечных сетей общего вида.

15. Основные понятия и задачи метода сетевого планирования и управления (СПУ).

16. Структурное планирование или сетевое представление проектов (программ). Основные правила построения сетевой модели.

17. Расчет сетевой модели. Постановка задачи определения критического пути.

18. Алгоритм определения критического пути и критического времени в сетевой модели проекта в методе СПУ.

19. Определение резервов времени работ и событий в методе СПУ.

20. Общая схема построения календарного графика выполнения работ в методе СПУ.

21. Табличный метод формирования календарного графика в методе СПУ.

22. Предмет изучения дисциплины Математическая теория оптимального управления.

23. Предмет изучения дисциплины Теория игр.

24. Примеры задач о поиске оптимального управления в непрерывных и дискретных по времени системах.

25. Примеры игровых задач.

26. Решение матричных игр методом сведения к задачам линейного программирования.

27. Метод Брауна-Робинсон итерационного решения матричных игр.

Приложение 2
к рабочей программе

7.3.2. Практические задания по дисциплине для самостоятельной подготовки к зачету

1. Задания по теме «Графический метод решения задач линейного программирования». **(ОПК-1)**

а) Найти F = 2x1 – x2 $\to$ min при ограничениях

$$\{x_1 + x_2 \ge 4, | \quad \{2x_1 - x_2 \ge 2,| \qquad x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

б) Найти F = 2x1 + x2 $\to$ max при ограничениях

$$\begin{cases} 4x_1 \quad x_2 \le 8, \\ \quad x_2 \le 5, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

в) Найти F = 2x1 – 3x2 $\to$ min при ограничениях

$$\{x_1 + x_2 \ge 4, | \quad \{2x_1 - x_2 \ge 1,| \qquad x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

2. Задания по теме «Симплекс-метод метод решения задач линейного программирования».

а) Найти $F = x_1 - x_2 - 3x_3 \to$ min при ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1 \quad x_2 \quad x_3 \le 1, \\ 4x_1 \quad 2x_2 \quad x_3 \ge 2, \\ 3x_1 \quad x_3 \le 5, \end{cases}$$

все $x_i \ge 0$.

б) Найти $F = 3x_1 + 4x_2 + x_3 \to$ max при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 \quad 2x_2 \quad 3x_3 \le 5, \\ 2x_1 \quad 3x_2 \quad 5x_3 \le 8, \\ 3x_1 \quad x_2 \quad 2x_3 \le 6, \end{cases}$$

все $x_i \ge 0$.

3. Задания по теме «Транспортные модели».

а)Решить транспортную задачу, заданную распределительной таблицей, используя метод потенциалов.

b_j	$b_1 = 110$	$b_2 = 50$	$b_3 = 150$	$b_4 = 100$
= 200	5	1	3	4
= 150	2	3	4	8
= 50	8	5	1	6

б)Решить транспортную задачу, заданную распределительной таблицей, используя метод потенциалов.

b_j	$b_1 = 100$	$b_2 = 50$	$b_3 = 150$	$b_4 = 100$
= 200	5	1	3	4
= 170	2	3	4	2
= 50	8	5	1	6

4. Задания по теме «Метод сетевого планирования и управления».

а) Постройте сетевую модель проекта.

Экономический факультет МГУ разрабатывает новую программу для повышения квалификации преподавателей, обучающихся количественным методам анализа экономики. Желательно, чтобы эту программу можно было реализовать в наиболее сжатые сроки. Имеются существенные взаимосвязи между дисциплинами, которые необходимо отразить, составляя расписание занятий. Дисциплины и их взаимосвязь указаны в таблице:

Дисциплина	Непосредственно предшествующие дисциплины	Время изучения, дни
A	–	4
B	–	6
C	A	2
D	A	6
E	C, B	3
F	C, B	3
G	D, E	5

Рассчитайте временные параметры событий и определите длину критического пути.

б) По данным о порядке следования и длительности работ постройте сетевую модель проекта и рассчитайте временные параметры событий. Какова длина критического пути?

Работа	Непосредственно предшествующие работы	Время выполнения, нед.

A	–	5
B	–	3
C	A	7
D	A	6
E	B	7
F	D, E	3
G	D, E	10
H	C, F	8

Постройте соответствующую диаграмму Ганта.

5. Задание по теме «Использование методов оптимизации для решения задач Теории оптимального управления и Теории игр.»
».

1. Решить матричную игру с матрицей **(ОПК-6)**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 1 \\ 3 & 8 & 5 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 3 \\ 7 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

итерационным методом Брауна-Робинсон, сделав 15-20 итераций. Результаты вычислений оформить в Excel, в следующей таблице:

№ итерации	Чист. страт. игрока *A*	Накопленные проигрыши игрока *B* при			Миним. средний проигрыш игрока *B*	Чист. страт. игрока *B*	Накопленные выигрыши игрока *A* при			Макс. средний выигрыш игрока *A*	Цена игры
		B_1	…	B_n			A_1	…	A_m		
2											
3											
…											

Далее указать получившиеся приближенно оптимальные смешанные стратегии игроков и цену игры.

2. Найти решение игры с той же матрицей *A*, используя симплекс-метод. Сравнить результаты.

Приложение 6
к рабочей программе

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДЕНЫ
на заседании кафедры информационных
технологий и статистики

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

по дисциплине

Методы оптимизации и моделирование экономических систем

Требования к выполнению и оформлению работы:

1) Сначала необходимо решить задачи линейного программирования, используя программное средство Excel (надстройка «поиск решения»). В задаче 2 нужно предварительно составить и записать экономико-математическую модель. Пример использования программного средства приведен ниже, после списка вариантов.

2) Одну из трех задач (по выбору) решить также симплексным методом «вручную», с использованием симплекс-таблиц; сравнить результат с полученным выше. Пример решения приведен ниже, после списка вариантов.

3) Для одной из задач (первой или второй, по выбору) записать двойственную к ней, не решая.

4) Студент, претендующий на оценку «удовлетворительно» на экзамене может задачу 3 не решать. На максимально высокую оценку за работу необходимо дать ответ на дополнительный вопрос (возможно, требующий численного эксперимента).

5) Результаты оформляются в виде отчета в word с соответствующим титулом.

Вариант 1.

1. Найти $F = x_1 - x_2 - 3x_3 \rightarrow min$ при ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \le 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 \ge -2, \\ 3x_1 + x_3 \le 5, \end{cases} \qquad \text{все } x_i \ge 0.$$

2. Предприятие производит изделия трех видов, поставляет их заказчикам и реализует на рынке. Заказчикам требуется 1000 изделий 1-го вида, 2000 изделий – 2-го вида и 2500 изделий 3-го вида. Условия спроса на рынке ограничивают число изделий 1-го вида 2000 единицами, 2-го – 3000 и 3-го – 5000.

Для изготовления изделий используется 4 типа ресурсов. Кол-во ресурсов, потребляемых для производства единицы изделия каждого вида и общее кол-во ресурсов, а также прибыль от реализации единицы изделия каждого вида заданы в таблице.

Тип ресурсов	Вид изделий			Всего ресурсов
	1	2	3	
1	500	300	1000	25000000
2	1000	200	100	30000000
3	150	300	200	20000000
4	100	200	400	40000000
Прибыль	20	40	50	

Как организовать производство, чтобы обеспечить заказчиков, не допустить затоваривания, получить максимальную прибыль?

3. Фирма получила заказы на разработку пяти программных продуктов. В фирме работают шесть квалифицированных программистов, которым можно поручить выполнение этих заказов. Каждый из них дал оценку времени (в днях), требуемого для разработки программ. Оценки приведены в таблице:

Программист	Программа				
	1	2	3	4	5
Дедкин	46	59	24	62	67
Бабкин	47	56	32	55	70
Внучкин	44	52	19	61	60
Жучкин	47	59	17	64	73
Кошкин	43	65	20	60	75
Мышкин	41	53	28	54	68

Выполнение каждого из пяти заказов поручают ровно одному программисту. По причине разной их квалификации оплата в день тоже различается:

Программист	Размер оплаты, руб./день
Дедкин	1
Бабкин	2
Внучкин	1,5
Жучкин	2
Кошкин	1,5
Мышкин	2

Распределите работу между программистами, чтобы общие издержки на оплату их труда были минимальны.

Дополнительный вопрос: Как изменится результат (решение о назначении заказов), если оплата труда в день у всех программистов будет одинаковой? Подтвердить решением.

Вариант 2.

1. Найти $F = 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 \to max$ при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 \le 3, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \le 3, \end{cases} \qquad \text{все } x_i \geq 0.$$

2. Магазин оптовой торговли реализует три вида продукции P_1 , P_2 и P_3. Прибыль от реализации единицы каждого вида продукции соответственно равна 50, 65 и 70 ден. ед. Полезная площадь помещений составляет 450 м^2, рабочее время работников магазина – 600 чел.-ч. Товарооборот должен быть не менее 240 ед. всей продукции. Объемы ресурсов и их затраты на реализацию единицы каждого вида продукции представлены в таблице.

Ресурсы	Объем ресурса	Затраты ресурса на реализацию продукции, ден.ед.		
		P_1	P_2	P_3
Полезная площадь, м^2	450	1,5	2	3
Рабочее время, чел.-ч.	600	3	2	1,5

Необходимо разработать план товарооборота, дающий максимальную прибыль.

Все ли ресурсы используются полностью в реализации оптимального плана?

3. Фирма получила заказы на разработку пяти программных продуктов. В фирме работают пять квалифицированных программистов, которым можно

поручить выполнение этих заказов. Каждый из них дал оценку времени (в днях), требуемого для разработки программ. Оценки приведены в таблице:

Программист	**Программа**				
	1	2	3	4	5
Дедкин	50	35	40	20	80
Бабкин	44	36	42	25	73
Внучкин	44	30	39	30	75
Жучкин	39	28	37	24	70
Кошкин	53	40	40	30	85

Выполнение каждого из пяти заказов поручают ровно одному программисту. По причине разной их квалификации оплата в день тоже различается:

Программист	**Размер оплаты, руб./день**
Дедкин	3
Бабкин	2
Внучкин	1,5
Жучкин	2
Кошкин	1,5

Распределите работу между программистами, чтобы общие издержки на оплату их труда были минимальны, и каждый программист работал ровно над одной программой.

Дополнительный вопрос: как изменится постановка задачи, если программ будет на одну больше, и все они должны быть разработаны данной командой? При этом допускается, что несколько человек могут трудиться над одной программой, один человек может выполнять более одного задания (быть назначен исполнителем более одной программы), но назначения разумны (нет значительного «перекоса», когда один делает всё, а другие ничего).

Вариант 3.

1. Найти $F = 3x_1 + 4x_2 + x_3 \to max$ при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 \le 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \le 8, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 \le 6, \end{cases} \qquad \text{все } x_i \ge 0.$$

2. На птицеферме употребляются два вида кормов - I и II. В единице массы корма I содержатся единица вещества *A*, 2 единицы вещества *B* и единица вещества *C*. В единице массы корма II содержатся три единицы вещества *A*, единица вещества *B* и две единицы вещества *C*. В дневной рацион каждой птицы надо включить не менее 21 единицы вещества *A*, не менее 15 единиц вещества *B* и не менее 8,5 единиц вещества *C*. Цена единицы массы корма I составляет 18 рублей, корма II - 20 рублей.

Каков должен быть ежедневный рацион кормления птицы, обеспечивающий наиболее выгодный по стоимости рацион и учитывающий требования по содержанию питательных веществ?

питательные вещества	**содержание веществ в единице массы корма, ед.**		**требуемое количество в смеси, ед.**
	корм I	корм II	
A	1	3	21
B	2	1	15
C	1	2	8,5
цена единицы массы корма, р	18	20	

Какой вид корма наиболее востребован, если считать, что они измеряются в одних и тех же единицах?

3. Фирма получила заказы на разработку пяти программных продуктов. В фирме работают пять квалифицированных программистов, которым можно

поручить выполнение этих заказов. Каждый из них дал оценку времени (в днях), требуемого для разработки программ. Оценки приведены в таблице:

Программист	**Программа**				
	1	2	3	4	5
Дедкин	50	40	40	28	15
Бабкин	53	45	42	29	26
Внучкин	54	39	49	30	18
Жучкин	49	41	47	3	20
Кошкин	53	40	45	32	19

Выполнение каждого из пяти заказов поручают ровно одному программисту. По причине разной их квалификации оплата в день тоже различается:

Программист	**Размер оплаты, руб./день**
Дедкин	2
Бабкин	2,5
Внучкин	1,5
Жучкин	2
Кошкин	3

Распределите работу между программистами, чтобы общие издержки на оплату их труда были минимальны, и каждый программист работал ровно над одной программой.

Дополнительный вопрос: как изменится постановка задачи, если программ будет на одну больше (можно добавить данные самостоятельно), и все они должны быть разработаны данной командой из пяти человек? При этом допускается, что над одной программой могут работать не более двух человек.

Вариант 4.

1. Найти $F = -2x_1 + x_2 - 3x_3 \rightarrow min$ при ограничениях

$$\begin{cases} 3x_1 - x_3 \le 8, \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 \le 1, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 \le 6, \end{cases} \qquad \text{все } x_i \ge 0.$$

2. Компания специализируется на выпуске хоккейных клюшек и наборов шахмат. Каждая клюшка приносит компании прибыль в размере \$2, а каждый шахматный набор - в размере \$4. На изготовление одной клюшки требуется четыре чел.-часа работы на участке *A* и два чел.-часа работы на участке *B*. Шахматный набор изготавливается с затратами шести чел.- часов на участке *A*, шести чел.- часов на участке *B* и одного чел.- часа на участке *C*. Доступная производственная мощность участка *A* составляет 120 чел.-часов в день, участка *B* – 72 чел.-часа и участка С – 10 чел.-часов.

Сколько клюшек и шахматных наборов должна выпускать компания ежедневно, чтобы получать максимальную прибыль?

производственные участки	затраты времени на единицу продукции, чел.-час.		доступный фонд времени, чел.-час.
	клюшки	наборы шахмат	
A	4	6	120
B	2	6	72
C	-	1	10
прибыль на единицу продукции, \$	2	4	

3. Фирма получила заказы на разработку пяти программных продуктов. В фирме работают шесть квалифицированных программистов, которым можно поручить выполнение этих заказов. Каждый из них дал оценку времени (в днях), требуемого для разработки программ. Оценки приведены в таблице:

Программист	**Программа**				
	1	2	3	4	5
Дедкин	50	35	40	20	80
Бабкин	44	36	42	25	73
Внучкин	44	30	39	30	75
Жучкин	39	28	37	24	70
Кошкин	53	40	40	30	85
Мышкин	45	33	38	34	74

Выполнение каждого из пяти заказов поручают ровно одному программисту. По причине разной их квалификации оплата в день тоже различается:

Программист	**Размер оплаты, руб./день**
Дедкин	1
Бабкин	2
Внучкин	1,5
Жучкин	3
Кошкин	1,5
Мышкин	2

Распределите работу между программистами, чтобы общие издержки на оплату их труда были минимальны.

Дополнительный вопрос: Изменится ли результат (решение о назначении заказов и значение целевой функции), если оплата труда в день у всех программистов будет одинаковой? Подтвердить экспериментально. Что в модели оценивает целевая функция?

Вариант 5.

1. Найти $F = x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 6x_4 \rightarrow max$ при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 5x_4 \le 1, \\ 5x_1 - 6x_2 + x_3 - x_4 \le 3, \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 \le 2, \end{cases} \quad \text{все } x_i \geq 0.$$

2. Составить экономико-математическую модель задачи линейного программирования и решить, используя программное средство Excel:

Мебельная фабрика для сборки столов и стульев привлекает к работе на 10 дней четырех столяров. Каждый столяр затрачивает 2 часа на сборку стола и 30 мин. На сборку стула. Покупатели обычно приобретают вместе со столом от четырех до шести стульев. Доход от продажи одного стола составляет 135 ден. ед., одного стула – 50 ден. ед. На фабрике установлен 8-часовой рабочий день.

Требуется спланировать структуру производства на 10 рабочих дней, которая максимизировала бы суммарный доход.

3. Компания реализует продукцию в пяти районах. Покупательные способности жителей районов оцениваются следующим образом:

район	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Покупательная способность (спрос)	**80000**	**60000**	**50000**	**40000**	**20000**

Профессиональный уровень пяти продавцов различен. Предполагается, что доля реализуемых покупательных способностей (спроса) составляет:

Продавец	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**
Доля реализации спроса	**0.5**	**0.7**	**0.45**	**0.8**	**0.4**

Как следует распределить продавцов по районам (одного продавца в один район), чтобы максимизировать количество проданной продукции?

Дополнительный вопрос: как изменятся постановка задачи и результат, если продавцов будет на два больше, чем районов (добавить данные самостоятельно)? Требование «один человек – один район» сохраняется.

Вариант 6.

Найти $F = 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 \to min$ при ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \le 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 2, \\ -x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 2x_4 \le 3, \end{cases} \quad \text{все } x_i \ge 0.$$

2. При подкормке растений нужно внести в почву на 1 га посева не менее 27 ед. химического вещества *A*, не менее 18 ед. – вещества *B* и не менее 35 ед. – вещества *C*. Совхоз закупает комбинированные удобрения двух видов: I и II. Цена единицы веса каждого удобрения соответственно равна 400 р. и 300 р. Содержание химических веществ в единице веса каждого вида удобрения указано в таблице.

Химические вещества	Содержание химических веществ в ед. веса удобрений	
	I вид	II вид
A	2	1,5
B	1	0,7
C	3	4

Требуется составить план закупок удобрений с наименьшими расходами.

3. Компания реализует продукцию в пяти районах. Покупательные способности жителей районов оцениваются следующим образом:

район	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Покупательная способность (спрос)	**100000**	**80000**	**75000**	**50000**	**40000**

Профессиональный уровень пяти продавцов различен. Предполагается, что доля реализуемых покупательных способностей (спроса) составляет:

Продавец	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**
Доля реализации спроса	**0.6**	**0.7**	**0.55**	**0.7**	**0.8**

Как следует распределить продавцов по районам (одного продавца в один район), чтобы максимизировать количество проданной продукции?

Дополнительный вопрос: как изменятся постановка задачи и результат, если районов будет на один больше, чем продавцов (добавить данные самостоятельно)? Как можно было бы учесть различную эффективность каждого продавца в каждом районе (с «плавающей» долей спроса)?

Вариант 7.

1. Найти $F = -4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \to max$ при ограничениях

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 \le 2, \\ x_1 - 5x_2 - x_3 \le 1, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 \le 5, \end{cases} \quad \text{все } x_i \ge 0.$$

2. Отделение налоговой инспекции собирается обновить компьютеры для своей работы. С этой целью выделяются финансовые ресурсы на покупку компьютеров в размере 1,8 млн. руб. и увеличиваются площади для их размещения до 210 м^2. Фирма-поставщик предлагает четыре варианта сборки компьютерного оборудования, имеющие разные стоимости, разные занимаемые площади и соответствующие показатели производительности (число обработанных документов в единицу времени). Данные по каждому из вариантов представлены в таблице:

Ограничения	**Варианты сборки компьютерного оборудования**			
	1	**2**	**3**	**4**
Стоимость ед., руб.	**24000**	**32000**	**36000**	**48000**
Занимаемая площадь на ед., м^2	**4**	**3**	**5**	**4**
Производительность	**5**	**4**	**7**	**6**

Известно, что нужно обеспечить компьютерами 40 человек, и компьютеров 3-го типа можно закупить не более 10 шт.

Требуется отыскать оптимальный план закупки оборудования у фирмы, чтобы производительность обработки документов была как можно выше.

3. Компания реализует продукцию в пяти районах. Покупательные способности жителей районов оцениваются следующим образом:

район	1	2	3	4	5
Покупательная способность (спрос)	**50000**	**60000**	**40000**	**70000**	**100000**

Профессиональный уровень пяти продавцов различен. Предполагается, что доля реализуемых покупательных способностей (спроса) составляет:

Продавец	A	B	C	D	E
Доля реализации спроса	**0.65**	**0.7**	**0.5**	**0.75**	**0.45**

Как следует распределить продавцов по районам (одного продавца в один район), чтобы максимизировать количество проданной продукции?

Дополнительный вопрос: как изменятся постановка задачи и результат, если районов будет на два больше, чем продавцов (изменить данные самостоятельно), и все они должны быть охвачены людьми? Решить поставленную задачу.

Вариант 8.

1. Найти $F = x_1 - 3x_2 + x_3 \to min$ при ограничениях

$$\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 \le 12, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 \le 7, \\ -4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \le 10, \end{cases} \qquad \text{все } x_i \ge 0.$$

2. Банк, предоставляющий определенный набор банковских услуг, находится в процессе формирования портфеля кредитов объемом 12 млн. $. В таблице представлены возможные типы кредитов.

Тип кредита	Ставка процента	Доля невозвращаемых кредитов
Кредиты физическим лицам	14%	0,1
Кредиты на покупку автомобилей	13%	0,07
Кредиты на покупку жилья	12%	0,03
Сельскохозяйственные	12,5%	0,05
Коммерческие	10%	0,02

Невозвращаемые кредиты считаются «безнадежными» и должны вычитаться из возможного дохода. Конкурентная борьба с другими финансовыми институтами вынуждает банк не менее 40% капитала помещать в сельскохозяйственные и коммерческие кредиты. Для содействия строительной индустрии региона банк планирует вложить в кредиты на покупку жилья не менее 50% от общей суммы кредитов физических лиц, автокредитов и жилья вместе.

Какова оптимальная структура кредитов банка с учетом его стремления максимизировать чистую прибыль от инвестируемых сумм?

3. Компания реализует продукцию в пяти районах. Покупательные способности жителей районов оцениваются следующим образом:

район	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Покупательная способность (спрос)	**40000**	**60000**	**90000**	**50000**	**70000**

Профессиональный уровень пяти продавцов различен. Предполагается, что доля реализуемых покупательных способностей (спроса) составляет:

Продавец	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**
Доля реализации спроса	**0.55**	**0.45**	**0.45**	**0.6**	**0.65**

Как следует распределить продавцов по районам (одного продавца в один район), чтобы максимизировать количество проданной продукции?

Дополнительный вопрос: как изменятся постановка задачи и результат, если требуется учесть *различную эффективность каждого продавца в каждом* районе (с «плавающей» долей спроса)? Решить задачу в новой постановке.

Вариант 9.

1. Найти $F = -10x_1 + 6\,x_2 + 12\,x_3 \to max$ при ограничениях

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 \le 1, \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 \le 4, \\ \quad -x_1 + 3x_3 \le 3, \end{cases} \qquad \text{все } x_{\text{i}} \ge 0.$$

2. Трикотажная фабрика использует для производства свитеров и кофточек шерсть, силон и нитрон. Прибыль, получаемая при реализации свитера и кофточки, соответственно равна 700 и 600 р. Количество пряжи каждого вида, необходимой для изготовления единицы изделий, приведено в таблице.

Вид пряжи	Запасы пряжи, кг	Расход пряжи на изделие	
		свитер	кофточка
шерсть	1000	0,5	0,3
силон	500	0,3	0,1
нитрон	400	0,2	0,2

Найти план выпуска изделий, максимизирующий прибыль.

Пять учебных групп экономического факультета собираются посетить во время практики десять организаций – предприятий и НИИ. Каждая учебная группа должна посетить **ровно одно предприятие и ровно одно НИИ**. Путём опроса студентов выявлены предпочтения каждой группы («1» означает наибольшее предпочтение, а «10» – наименьшее). Предпочтения групп показаны в таблице (П1 – П5 – предприятия), НИИ1 – НИИ5 – научно-исследовательские институты).

Организация	Номер группы				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
П1	3	2	1	4	2
П2	2	5	3	3	5
П3	1	1	2	1	1
П4	4	3	5	2	9
П5	6	7	4	6	6
НИИ1	7	4	8	7	4
НИИ2	10	8	6	10	10
НИИ3	5	6	7	5	3
НИИ4	9	9	9	8	8
НИИ5	8	10	10	9	7

Определите, какие **две организации** следует посетить каждой группе, чтобы максимально учесть ее предпочтения.

Дополнительный вопрос: как изменятся постановка задачи и результат, если разрешить группам посетить **две любые** организации, возможно и совпадающего типа? Что в модели оценивает целевая функция?

Вариант 10.

1. Найти $F = -3x_1 + 5x_2 - 8x_3 + 6x_4 \rightarrow max$ при ограничениях

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 - 4x_3 + x_4 \le -2, \\ -3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 5x_4 \le 0, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 \le 1, \end{cases} \quad \text{все } x_i \ge 0.$$

2. Факультет послевузовского обучения местного университета предлагает в общей сложности до 30 курсов каждый семестр. Все курсы условно можно разделить на 2 типа: практические (деревообработка, обучение работе на компьютере, ремонт оборудования и т.д.) и гуманитарные (история, музыка, изобразительное искусство...). Чтобы удовлетворить запросы обучающихся, в каждом семестре должно предлагаться не менее 10 курсов каждого типа. Факультет оценивает доход от одного практического курса в 1500$, а гуманитарного – в 1000$.

Какова оптимальная структура курсов для факультета?

3. Пять учебных групп экономического факультета собираются посетить во время практики десять организаций – предприятий и НИИ. Каждая учебная группа должна посетить **две организации любого типа**. Путём опроса студентов выявлены предпочтения каждой группы («1» означает наибольшее предпочтение, а «10» – наименьшее). Предпочтения групп показаны в таблице (П1 – П5 – предприятия), НИИ1 – НИИ5 – научно-исследовательские институты).

Организация	Номер группы				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
П1	10	7	2	4	7
П2	2	9	3	9	5
П3	9	1	1	1	1
П4	4	3	5	2	9
П5	6	2	10	6	8
НИИ1	7	4	8	7	4
НИИ2	3	8	6	8	10
НИИ3	5	6	7	5	3
НИИ4	1	5	9	10	6
НИИ5	8	10	4	3	2

Определите, какие две организации следует посетить каждой группе, чтобы, по возможности, учесть ее предпочтения, и чтобы **в каждую организацию попала ровно одна группа.**

Дополнительный вопрос: как изменятся постановка задачи и результат, если в одну организацию можно направить **не более двух** групп (учитывая их предпочтения), а какие-то организации могут быть не задействованы вообще?

Вариант 11.

1. Найти $F = 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 - x_5 \to max$ при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 = 3, \\ 4x_1 + x_3 - 3x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_4 + x_5 = 5, \end{cases} \qquad \text{все } x_i \geq 0.$$

2. Компания специализируется на выпуске хоккейных клюшек и наборов шахмат. Каждая клюшка приносит компании прибыль в размере 3000 д.е, а каждый шахматный набор - в размере 4500 д.е. На изготовление одной клюшки требуется три чел.-часа работы на участке А и три чел.-часа работы на участке В. Шахматный набор изготавливается с затратами шести чел.- часов на участке А, четырех чел.- часов на участке В и одного чел.- часа на участке С. Доступная производственная мощность участка А составляет 250 чел.-часов в день, участка В – 180 чел.-часа и участка С – 50 чел.-часов.

Сколько клюшек и шахматных наборов должна выпускать компания ежедневно, чтобы получать максимальную прибыль?

3. Пять учебных групп экономического факультета собираются посетить во время практики десять организаций – предприятий и НИИ. Каждая учебная группа должна посетить **две организации любого типа**. Путём опроса студентов выявлены предпочтения каждой группы («1» означает наибольшее предпочтение, а «10» – наименьшее). Предпочтения групп показаны в таблице (П1 – П5 – предприятия), НИИ1 – НИИ5 – научно-исследовательские институты).

Организация	**Номер группы**				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
П1	5	5	2	4	7
П2	9	9	3	9	5
П3	2	1	1	1	2
П4	4	3	5	2	9
П5	6	2	10	6	8
НИИ1	7	4	8	7	4
НИИ2	3	8	6	8	10
НИИ3	10	6	7	5	3
НИИ4	1	7	9	10	6
НИИ5	8	10	4	3	1

Определите, какие две организации следует посетить каждой группе, чтобы, по возможности, учесть ее предпочтения, и чтобы **в каждую организацию попала ровно одна группа.**

Дополнительный вопрос: как изменятся постановка задачи и результат, если в одну организацию можно направить **не более трех** групп (учитывая их предпочтения), а какие-то организации могут быть не задействованы вообще?

Вариант 12.

1. Найти $F = 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 \rightarrow max$ при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 6, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 7, \\ 3x_1 + x_2 + 6x_3 \le 9, \end{cases} \qquad \text{все } x_i \ge 0.$$

2. Имеется 2 вида корма – I и II, содержащие питательные вещества (витамины) S_1, S_2 и S_3. Содержание числа единиц питательных веществ в 1 кг каждого вида корма и необходимый минимум питательных веществ приведены в таблице.

Питательные вещества	**Необходимый минимум питательных веществ**	**Число ед. питательных веществ в 1 кг корма**	
		I	II
S_1	12	2	2,5
S_2	10	1	1,5
S_3	20	1,5	1

Стоимость 1 кг корма I и II вида соответственно равна 4 и 6 ден. ед.

Требуется составить рацион, имеющий минимальную стоимость, в котором содержание каждого вида питательных веществ было бы не менее установленного предела.

3. Пять учебных групп экономического факультета собираются посетить во время практики десять организаций – предприятий и НИИ. Каждая учебная группа должна посетить **ровно одно предприятие и ровно одно НИИ**. Путём опроса студентов выявлены предпочтения каждой группы («1» означает

наибольшее предпочтение, а «10» – наименьшее). Предпочтения групп показаны в таблице (П1 – П5 – предприятия), НИИ1 – НИИ5 – научно-исследовательские институты).

Организация	**Номер группы**				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
П1	3	10	4	3	2
П2	1	5	3	4	5
П3	10	4	2	7	9
П4	4	3	5	2	1
П5	6	7	6	6	6
НИИ1	7	1	8	10	4
НИИ2	2	2	1	1	3
НИИ3	5	6	7	5	10
НИИ4	8	9	9	8	8
НИИ5	9	8	10	9	7

Определите, какие **две организации** следует посетить каждой группе, чтобы максимально учесть ее предпочтения.

Дополнительный вопрос: как изменятся постановка задачи и результат, если разрешить группам посетить **две любые** организации, возможно и совпадающего типа? Что в модели оценивает целевая функция?

Вариант 13.

1. Найти $F = -7x_1 - 3x_3 \to min$ при ограничениях

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 \le 7, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \le 6, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 \le 1, \end{cases} \qquad \text{все } x_i \ge 0.$$

2. Фирма производит три модели электронных реле. Каждая модель требует две стадии сборки. Время (в мин.), необходимое для сборки на каждой стадии, а также прибыли от продажи моделей, приведены в таблице.

Продукт	**Стадия 1**	**Стадия 2**	**Прибыль**	**Заказ**
Модель А	**2,5**	**2**	**82,5**	**10**
Модель В	**1,8**	**1,6**	**70**	**10**
Модель С	**2**	**2,2**	**78**	**10**
Врем. ресурс	**450**	**450**		

Оборудование на каждой стадии работает 7,5 час. в течение рабочего дня. Менеджер желает максимизировать прибыль от продукции, **произведенной за день**. Каков должен быть оптимальный производственный план на каждый день при условии, что имеется ежедневный заказ по 20 деталей каждого вида?

Допустим, имеется возможность установить 2 сверхурочных часа в день только для одной из стадий обработки. Для какой именно стадии это лучше сделать, и позволит ли это увеличить общую прибыль?

3. Имеется четыре исполнителя (И1–И4), которых необходимо распределить для выполнения четырех работ (Р1–Р4) таким образом, чтобы минимизировать суммарную себестоимость выполнения всех работ и один

исполнитель выполнял ровно одну работу. Матрица себестоимостей имеет вид:

	Р1	Р2	Р3	Р4
И1	75	30	10	25
И2	20	35	40	50
И3	15	55	70	65
И4	25	30	20	100

Дополнительный вопрос: как изменятся постановка задачи и результат, если для назначения имеется пять исполнителей? Самостоятельно изменить данные и решить задачу. Что в модели оценивает целевая функция?

Вариант 14.

1. Найти $F = -16x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 + 5x_5 \rightarrow max$ при ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 10, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_4 = 6, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_5 = 8, \end{cases} \qquad \text{все } x_i \geq 0.$$

2. Банк планирует вложить 200000$ в кредитование частных лиц и покупок автомобилей. Банковские комиссионные составляют 14% по кредитам частным лицам и 12% при кредитовании покупок автомобилей. Оба типа кредитов возвращаются через год. Известно, что около 3% кредитов частным лицам и 2% автомобильных кредитов не возвращаются. Кроме того, по решению руководства, объемы кредитов на покупку автомобилей более чем в 2 раза превышают другие кредиты частным лицам.

Найдите оптимальное размещение средств банка по 2-м описанным видам кредитования.

3. Имеется четыре исполнителя (И1–И4), которых необходимо распределить для выполнения четырех работ (Р1–Р4) таким образом, чтобы минимизировать суммарную себестоимость выполнения всех работ и один исполнитель выполнял ровно одну работу. Матрица себестоимостей имеет вид:

	Р1	Р2	Р3	Р4
И1	20	30	40	25
И2	20	35	45	50
И3	15	55	55	40
И4	25	30	40	50

Дополнительный вопрос: как изменятся постановка задачи и результат, если имеется пять исполнителей, и разрешено на одну работу назначать не более двух исполнителей (например, кто-то замещает часть ставки)? Самостоятельно изменить данные и решить задачу.

Вариант 15.

1. Найти $F = 2x_1 + x_2 - 3x_3 \to max$ при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 \le 4, \\ 5x_1 - x_3 \le 12, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \le 4, \end{cases} \qquad \text{все } x_i \ge 0.$$

2. Для сохранения здоровья человек должен потреблять в сутки некоторое количество питательных веществ: белков – не менее 10 ед., жиров – не менее 12 ед., углеводов – не менее 14 ед., воды – не менее 18 ед. и не более 25, витаминов – не менее 2 ед. В каждом из двух видов пищи *A* и *B* содержится соответственно (3, 2, 4, 6, 0,25) и (2, 4, 3, 5, 0,35) ед. питательных веществ.

Стоимость каждой единицы пищи *A* равна 16 ден. ед., единицы пищи *B* – 18 ден. ед. Необходимо так организовать питание, чтобы его стоимость была наименьшей, но необходимые питательные вещества человек получал не ниже нормы.

3. Имеется четыре исполнителя (И1–И4), которых необходимо распределить для выполнения четырех работ (Р1–Р4) таким образом, чтобы минимизировать суммарную себестоимость выполнения всех работ и один исполнитель выполнял ровно одну работу. Матрица себестоимостей имеет вид:

	Р1	Р2	Р3	Р4
И1	75	30	10	25
И2	20	35	40	50
И3	15	55	70	65
И4	25	30	20	80

Дополнительный вопрос: как изменятся постановка задачи и результат, если имеется шесть должностей (работ), на которые их можно назначить? Назначения предполагаются разумными (один не делает все и может работать не более, чем на 1,5 ставки). Самостоятельно изменить данные и решить задачу, в которой все должности должны быть полностью «охвачены» работниками.

Вариант 16.

1. Найти $F = 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \to max$ при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 \le 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 \le 1, \end{cases} \quad \text{все } x_i \ge 0.$$

2. Предприятие располагает сырьем, рабочей силой и оборудованием, необходимым для производства 4-х видов товаров. Прибыль от реализации единицы каждого вида товара соответственно равна 45, 35, 65 и 60 ден. ед. Запасы ресурсов, а также затраты этих ресурсов на изготовление единицы каждого вида товара указаны ниже.

Вид ресурса	Запасы ресурсов	Затраты ресурсов на изготовление единицы товара			
		1 вид	2 вид	3 вид	4 вид
Сырьё, кг	80	1	3	6	5
Раб. сила, чел.	500	2	4	10	26
Оборудование, станко-ч.	150	2	6	5	3

Определить ассортимент товара, дающий максимальную прибыль с учетом того, что товара 2-го вида нужно выпустить не менее 10 единиц.

3. Имеется четыре исполнителя (И1–И4), которых необходимо распределить для выполнения четырех работ (ставок, Р1–Р4) таким образом, чтобы минимизировать суммарную себестоимость выполнения всех работ и один исполнитель выполнял ровно одну работу. Матрица себестоимостей имеет вид:

	Р1	Р2	Р3	Р4
И1	40	50	60	55
И2	30	45	50	50
И3	45	55	40	45
И4	35	30	30	50

Дополнительный вопрос: как изменятся постановка задачи и результат, если имеется пять исполнителей, которые могут быть заняты частично и одновременно на разных работах (не более 1 ставки суммарно на исполнителя)? Самостоятельно изменить данные и решить задачу при условии разумности назначений. Что в модели оценивает целевая функция?

Вариант 17.

1. Найти $F = -3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \rightarrow min$ при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 \le 4, \\ 5x_1 - x_3 \le 12, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \le 4, \end{cases} \qquad \text{все } x_i \ge 0.$$

2. На ферме употребляются три вида корма – I, II и III. В единице массы корма I содержатся единица вещества *A*, 3 единицы вещества *B* и 2 единицы вещества *C*. В единице массы корма II содержатся полторы единицы вещества *A*, единица вещества *B* и три единицы вещества *C*. В единице массы корма III содержатся две единицы вещества *A*, две единицы вещества *B* и единица вещества *C*. В дневной рацион каждого животного надо включить не менее 28 единиц вещества *A*, не менее 30 единиц вещества *B* и не менее 20 единиц вещества *C*. Цена единицы массы корма I составляет 25 рублей, корма II - 30 рублей, корма III - 40 рублей.

Каков должен быть ежедневный рацион кормления птицы, обеспечивающий наиболее выгодный по стоимости рацион и учитывающий требования по содержанию питательных веществ?

питательные вещества	**содержание веществ в единице массы корма, ед.**			**требуемое количество в смеси, ед.**
	корм I	корм II	корм III	
A	1	1,5	2	28
B	3	1	2	30
C	2	3	1	20
цена единицы массы корма, р	25	30	40	

Составить оптимальный по стоимости ежедневный рацион кормления животного, обеспечивающий требуемое количество питательных веществ.

3. Три актёра озвучивают мультфильм с пятью персонажами. Режиссер

решил, что каждый актёр может озвучить не более двух персонажей. Баллы, показывающие, насколько актер соответствуют той или иной роли, занесены в следующую таблицу.

	Иванов	**Петров**	**Сидорова**
Персонаж 1	6	4	8
Персонаж 2	10	6	8
Персонаж 3	10	0	9
Персонаж 4	0	2	4
Персонаж 5	6	4	0

Распределить роли так, чтобы сумма баллов была максимальной. Что выражает значение целевой функции в данной модели?

Дополнительный вопрос: как изменятся постановка задачи и результат, если актёр Петров категорически отказывается озвучивать персонажей 2 и 5?

Вариант 18.

1. Найти $F = x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 \to max$ при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 \le 3, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \le 3, \end{cases} \qquad \text{все } x_i \ge 0.$$

2. Фирма производит три модели электронных реле. Каждая модель требует две стадии сборки. Время (в мин.), необходимое для сборки на каждой стадии, а также прибыли от продажи моделей, приведены в таблице.

Продукт	**Стадия 1**	**Стадия 2**	**Прибыль**	**Заказ**
Модель А	**2,5**	**2**	**82,5**	**20**
Модель В	**1,8**	**1,6**	**70**	**20**
Модель С	**2**	**2,2**	**78**	**20**
Врем. ресурс	**450**	**450**		

Оборудование на каждой стадии работает 7,5 час. в течение рабочего дня. Менеджер желает максимизировать прибыль **за все пять рабочих дней**. Каков должен быть оптимальный производственный план на каждый день (не обязательно одинаковый!) при условии, что имеется недельный заказ по 20 деталей каждого вида?

Допустим, имеется возможность установить 2 сверхурочных часа во все дни только для одной из стадий обработки. Для какой именно стадии это лучше сделать, и позволит ли это увеличить общую прибыль?

3. Администрация деревоперерабатывающего завода приняла на работу пять человек. Каждый из них имеет способности и навыки и затрачивает определенное время на выполнение определенной работы. Необходимо

выполнить пять видов работ. Время выполнения работы каждым работником (в часах) приведено в таблице.

Работник ↓	Работа 1	Работа 2	Работа 3	Работа 4	Работа 5
A_1	40	36	35	44	43
A_2	30	27	28	23	25
A_3	15	15	18	19	14
A_4	21	24	22	22	20
A_5	19	18	17	22	20

Требуется назначить на каждый вид работы ровно одного из работников. Как это нужно сделать, чтобы общее время, необходимое для завершения всех видов работ, было минимальным?

Дополнительный вопрос: что изменится, если стоимости часа работы у исполнителей не одинаковы? Привести пример модификации исходной задачи и найти ее решение.

Вариант 19.

1. Найти $F = -x_1 + 10x_2 + 3x_3 \rightarrow max$ при ограничениях

$$\begin{cases} 3x_1 - x_3 \le 8, \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 \le 1, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 \le 6, \end{cases} \qquad \text{все } x_i \ge 0.$$

2. Банк планирует вложить 2 млн. долларов в кредитование частных лиц и покупок автомобилей. Банковские комиссионные составляют 15% по кредитам частным лицам и 10% при кредитовании покупок автомобилей. Оба типа кредитов возвращаются через год. Известно, что около 5% кредитов частным лицам и 3% автокредитов не возвращаются. Кроме того, по решению руководства, объемы автокредитов должны не менее, чем в полтора раза, превышать кредиты частным лицам.

Найдите оптимальное размещение средств банка по 2-м описанным видам кредитования с учетом возможных потерь.

3. Недобросовестный студент пропустил много занятий. Помочь ему наверстать упущенное вызвалось 10 человек. Каждый из них может помочь только по одной дисциплине. Эффективность этой помощи выражена в баллах:

7	5	1	9	1	2	7	7	7	5	Володя
6	3	8	6	5	7	1	4	4	3	Даша
3	2	8	9	4	7	1	7	7	1	Саша
6	1	5	7	7	2	1	5	7	8	Наташа
7	4	3	3	8	8	5	5	6	6	Женя
7	3	3	5	5	3	5	3	2	1	Таня
3	8	6	7	7	8	6	6	3	5	Аня
9	6	2	8	1	8	4	2	7	7	Лена
9	4	6	4	3	3	7	3	1	6	Алексей
2	3	5	1	7	5	2	3	1	1	Сергей
алгебра	геометрия	физика	русский язык	литература	английский	биология	география	обществозна	химия	

Кого из помощников ему лучше всего выбрать по каждому предмету?

Дополнительный вопрос: Как нужно изменить модель, если помощников на одного меньше, а предметы те же? Приведите пример и решите задачу.

Вариант 20.

Найти $F = -x_1 + 2x_2 - 8x_3 + x_4 \rightarrow min$ при ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \le 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 2, \\ -x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 2x_4 \le 3, \end{cases} \quad \text{все } x_i \ge 0.$$

2. Для сохранения здоровья некий живой организм должен потреблять в сутки некоторое количество питательных веществ: белков – не менее 50 ед., жиров – не менее 30 ед., углеводов – не менее 70 ед., воды – не менее 60 ед. и не более 100 ед., витаминов – не менее 5 ед. и не более 10 ед. В каждом из трех видов пищи *A*, *B* и *C* содержится соответственно (5, 3, 10, 12, 0, 5), (2, 1, 12, 20, 0,25), и (4, 4, 18, 18, 0,4) ед. питательных веществ.

Стоимость каждой единицы пищи *A* равна 30 ден. ед., единицы пищи *B* – 20 ден. ед. , C – 45 ден. ед. Необходимо так организовать питание организма, чтобы его стоимость была наименьшей, но потребление веществ было в указанных границах.

3. В конкурсе на занятие 6-ти вакансий (V1, V2, V3, V4, V5, V6) участвуют семь претендентов (P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7). Результаты тестирования каждого претендента, на соответствующие вакансии (эффективность), даны в виде таблицы (тестирование производилось по десятибалльной системе):

	V1	V2	V3	V4	V5	V6
P1	4	5	2	5	3	6
P2	6	5	8	2	4	7
P3	8	8	4	8	6	3
P4	7	4	6	5	4	2
P5	5	8	5	6	4	8
P6	6	4	6	4	2	3
P7	4	4	2	3	5	6

Определить, какого претендента и на какую вакансию следует принять (один человек – одна должность), чтобы суммарная эффективность всех претендентов оказалась максимальной.

Дополнительный вопрос: Оценку чего выражает оптимальное значение целевой функции? Как изменить условие задачи, чтобы оптимум в модели был противоположен исходному? Приведите пример и решите задачу.

Вариант 21.

1. Найти $F = -4\,x_1 + 3\,x_2 + x_3 \to max$ при ограничениях

$$\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 \le 12, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 \le 7, \\ -4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \le 10, \end{cases} \qquad \text{все } x_i \ge 0.$$

2. Фирма производит три модели электронных реле. Каждая модель требует две стадии сборки. Время (в мин.), необходимое для сборки на каждой стадии, а также прибыли от продажи моделей, приведены в таблице.

Продукт	**Стадия 1**	**Стадия 2**	**Прибыль от шт. (у.е.)**	**Заказ**
Модель А	**1,5**	**1,2**	**70**	**10**
Модель В	**1,4**	**1,6**	**75**	**10**
Модель С	**2**	**2,5**	**80**	**10**
Врем. ресурс	**450**	**450**		

Оборудование на каждой стадии работает 7,5 час. в течение рабочего дня. Менеджер желает максимизировать прибыль **произведенного за все пять дней (планы по дням могут отличаться!)**. Каков должен быть оптимальный производственный план на каждый день при условии, что имеется ежедневный заказ по 20 деталей каждого вида?

3. Три актёра озвучивают мультфильм с пятью персонажами. Режиссер решил, что каждый актёр может озвучить не более двух персонажей. Баллы, показывающие, насколько актер соответствуют той или иной роли, занесены в следующую таблицу.

	Иванов	**Петров**	**Сидорова**
Персонаж 1	5	8	2
Персонаж 2	10	4	10
Персонаж 3	8	2	6
Персонаж 4	1	2	0
Персонаж 5	3	0	6

Распределить роли так, чтобы сумма баллов была максимальной. Что выражает значение целевой функции в данной модели?

Дополнительный вопрос: как изменятся постановка задачи и результат, если актёр Сидорова согласна озвучить только одного персонажа?

Вариант 22.

1. Найти $F = 5x_1 - 2x_1 + x_3 \to min$ при ограничениях

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 \le 7, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \le 6, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 \le 1, \end{cases} \qquad \text{все } x_i \ge 0.$$

2. Трикотажная фабрика использует для производства свитеров и кофточек шерсть, силон и нитрон. Прибыль, получаемая при реализации свитера и кофточки, соответственно равна 1200 и 1000 р. Количество пряжи каждого вида, необходимой для изготовления единицы изделий, приведено в таблице.

Вид пряжи	Запасы пряжи, кг	Расход пряжи на изделие, кг	
		свитер	кофточка
шерсть	800	0,6	0,4
силон	400	0,2	0,1
нитрон	600	0,15	0,2

Найти план выпуска изделий, максимизирующий прибыль. Имеется ли сильно невостребованный ресурс?

3. Администрация деревоперерабатывающего завода приняла на работу пять человек. Каждый из них имеет способности и навыки и затрачивает определенное время на выполнение определенной работы. Необходимо выполнить пять видов работ (закрыть соответствующее количество ставок). Время выполнения работы каждым работником (в часах) приведено в таблице.

Работник ↓	Работа 1	Работа 2	Работа 3	Работа 4	Работа 5
A_1	25	16	15	14	13
A_2	25	17	18	23	15
A_3	30	15	20	19	14
A_4	27	20	22	25	12
A_5	29	19	17	32	10

Требуется назначить на каждый вид работы ровно одного из работников. Как это нужно сделать, чтобы общее время, необходимое для завершения всех видов работ, было минимальным?

Дополнительный вопрос: как изменятся постановка задачи и результат, если можно назначать доли разных работ (не более двух и в сумме не более 1,5 ставки) каждому работнику?

Вариант 23.

1. Найти $F = 2x_1 - x_2 + x_4 - 3x_5 \rightarrow min$ при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 = 3, \\ 4x_1 + x_3 - 3x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_4 + x_5 = 5, \end{cases} \qquad \text{все } x_i \geq 0.$$

2. На ферме употребляются три вида корма – I, II и III. В единице массы корма I содержатся 2 единицы вещества *A*, 3 единицы вещества *B* и 4 единицы вещества *C*. В единице массы корма II содержатся полторы единицы вещества *A*, 2 единицы вещества *B* и 2,5 единицы вещества *C*. В единице массы корма III содержатся две единицы вещества *A*, 3 единицы вещества *B* и единица вещества *C*. В дневной рацион каждого животного надо включить не менее 28 единиц вещества *A*, не менее 30, но не более 40 единиц вещества *B* и не менее 20 единиц вещества *C*. Цена единицы массы корма I составляет 50 рублей, корма II - 45 рублей, корма III - 40 рублей.

Каков должен быть ежедневный рацион кормления птицы, обеспечивающий наиболее выгодный по стоимости рацион и учитывающий требования по содержанию питательных веществ?

питательные вещества	**содержание веществ в единице массы корма, ед.**			**требуемое количество в смеси, ед.**
	корм I	корм II	корм III	
A	2	1,5	2	38
B	3	2	3	50
C	4	2,5	1	40
цена единицы массы корма, р	50	30	40	

Составить оптимальный по стоимости ежедневный рацион кормления животного, обеспечивающий требуемое количество питательных веществ.

3. В конкурсе на занятие 6-ти вакансий (V1, V2, V3, V4, V5, V6) участвуют семь претендентов (P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7). Результаты тестирования каждого претендента, на соответствующие вакансии (эффективность), даны в виде таблицы (тестирование производилось по десятибалльной системе):

	V1	V2	V3	V4	V5	V6
P1	7	5	7	5	4	6
P2	6	4	8	6	7	4
P3	8	6	4	8	6	3
P4	7	7	8	7	9	5
P5	5	9	7	9	4	9
P6	6	8	6	8	8	4
P7	7	7	8	7	7	6

Определить, какого претендента и на какую вакансию следует принять, чтобы суммарная эффективность всех претендентов оказалась максимальной.

Дополнительный вопрос: Что выражает оптимальное значение целевой функции? Как изменить условие задачи, чтобы каждый претендент получил работу? Привести пример и решить измененную задачу.

Задачи линейного программирования (ЗЛП), решаемые вручную с помощью симплекс-таблиц, удобно решать в пакете *Excel*.

Пример. Цех производит два вида краски: для наружных и внутренних работ. Для изготовления красок используются исходные продукты *A* и *B*. Максимально возможные суточные запасы этих продуктов определяются ёмкостями, имеющимися в цехе, и составляют 24 и 6 т соответственно. При производстве 1 т краски для наружных работ расходуются 6 т продукта *A* и 1 т продукта *B*, а при производстве 1 т краски для внутренних работ – 4 т продукта *A* и 2 т продукта *B*.
Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на краску для внутренних работ не превышает 2 т. Кроме того, технологические особенности таковы, что произведенное количество краски для внутренних работ не может превышать аналогичный показатель для наружных работ более, чем на 1 т.
Доход от реализации 1 т краски для наружных работ составляет 5 у.е., а доход от реализации 1 т краски для внутренних работ, соответственно, 4 у.е.
Записать математическую модель задачи, на основе которой можно установить, какое количество краски каждого вида должен производить цех, чтобы доход от реализации произведенной продукции был максимальным. Решить задачу в пакете *Excel*.

Решение. Поскольку нужно определить объёмы производства каждого вида краски, управляемыми переменными являются x_1 и x_2 – суточный объём производства краски для наружных и внутренних работ соответственно (в тоннах).
Суточный расход каждого из исходных продуктов *A* и *B* для производства красок не может превосходить максимально возможного суточного запаса этого продукта, т.е. $6x_1 + 4x_2 \le 24$ (для продукта *A*) и $x_1 + 2x_2 \le 6$ (для продукта *B*).
Ограничение на величину суточного спроса на краску для внутренних работ имеет вид $x_2 \le 2$. Разница в объёмах потребления красок: $x_2 - x_1 \le 1$. Поскольку объёмы производства неотрицательны, следует ввести ограничения на знак управляемых переменных: $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$.
Объёмы сбыта каждого вида краски не зависят друг от друга, следовательно, общий доход *L* равен сумме дохода от продажи краски для внутренних работ и дохода от продажи краски для наружных работ. Таким образом, целевая функция
$L(x_1, x_2) = 5x_1 + 4x_2$ (в условных денежных единицах), и математическую модель ЗЛП можно представить в виде

Целевая функция:	$L\left(x_1,\, x_2\right) = 5x_1 + 4x_2 \to \max$;
Линейные ограничения:	$6x_1 + 4x_2 \le 24$,
	$x_1 + 2x_2 \le 6$,
	$x_2 \le 2$,
	$x_2 - x_1 \le 1$;
Естественные ограничения:	$x_1 \ge 0$,
	$x_2 \ge 0$.

На рабочем листе *Excel* (рис. 1) укажем исходную информацию в следующих ячейках:
B1:B2 – искомый суточный объём выпуска красок (эти ячейки сначала пусты, поскольку x_1 и x_2 ещё не найдены);
B3:B4 – доход от реализации 1 т краски;
B5:B6 – формулы для подсчёта суточного расхода компонентов *A* и *B*;

B7 – формула для разницы в объёмах потребления красок;

B8 – формула для целевой функции

(в соседних ячейках столбца *A* – пояснения). Поскольку ячейки **B1:B2** пусты, то и в ячейках, ссылающихся на них, первоначально находятся нули.

Книга1.xlsx *

	A	B	C
1	x1 =		
2	x2 =		
3	c1 =	5	
4	c2 =	4	
5	расход сырья *A*	0	
6	расход сырья *B*	0	
7	разность x2 - x1	0	
8	цел. ф-ция *L* =	0	
9			
10			

Рисунок 1

Поясним заполнение ячеек рисунком 2, на котором показаны вписываемые в ячейки формулы:

Книга1.xlsx *

	A	B	C	D
1	x1 =			
2	x2 =			
3	c1 =	5		
4	c2 =	4		
5	расход сырья *A*	=6*B1+4*B2		
6	расход сырья *B*	=1*B1+2*B2		
7	разность x2 - x1	=B2-B1		
8	цел. ф-ция *L* =	=B3*B1+B4*B2		
9				
10				

Рисунок 2

Из меню **ДАННЫЕ → ПОИСК РЕШЕНИЯ** вызываем диалоговое окно (Рис. 3). Лучше сначала выбрать метод решения «симплекс-методом» (не ОПГ).

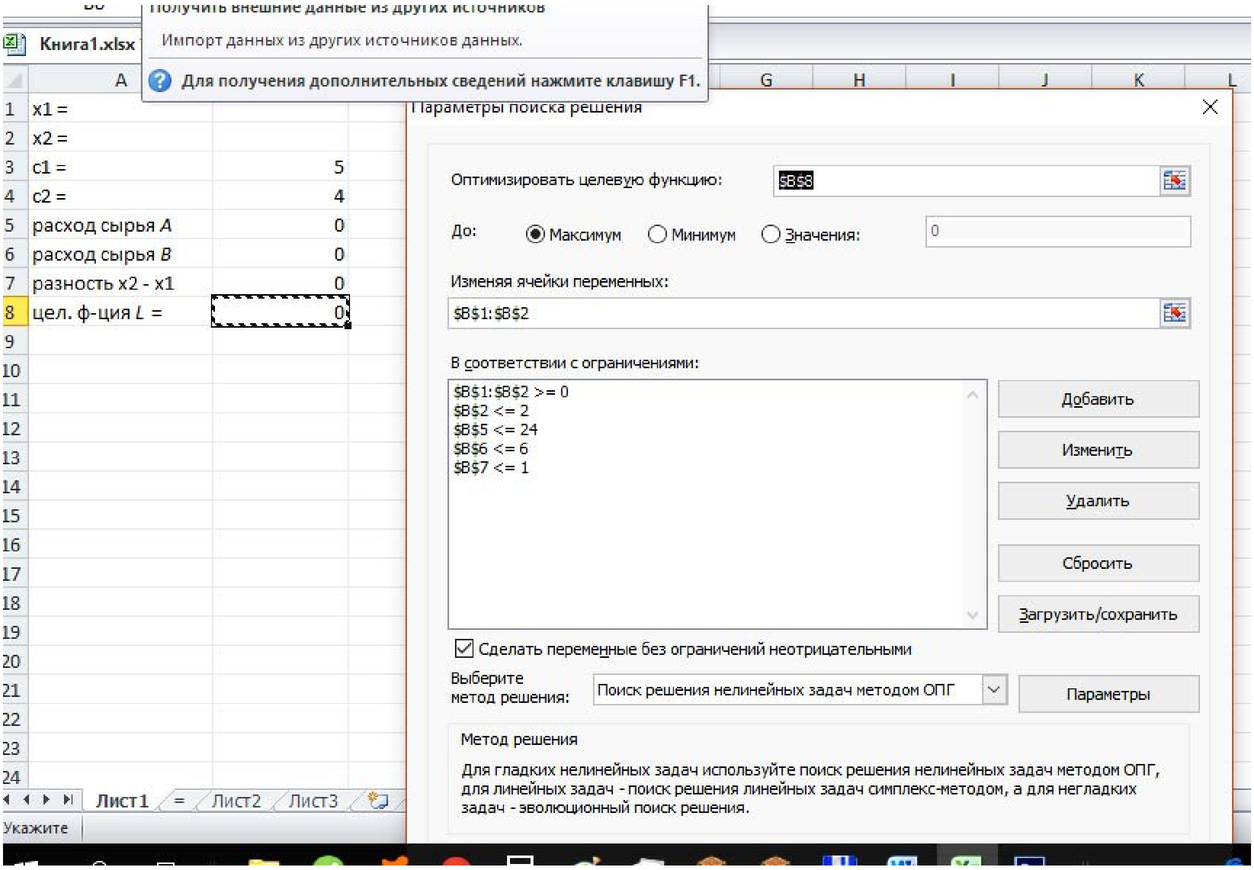
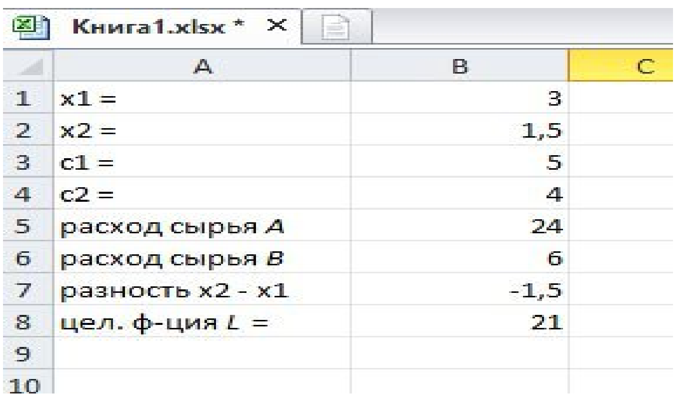


Рисунок 3

1. В поле **Оптимизироватьть целевую функцию** вводим адрес B8 ячейки с формулой для ЦФ;
2. Ниже выбираем переключатель на **максимум**;
3. В поле **Изменяя ячейки переменных** указываем адреса B1:B2 ячеек, содержащих значения x_1 и x_2;
4. Кнопкой **Добавить** начинаем вводить все ограничения ЗЛП;
5. В поле **Выберите метод решения** задайте «симплекс-методом».
6. Нажатием кнопки **Найти решение** получаем готовое решение:

   $x_1 = 3$, $x_2 = 1{,}5$, оптимальное значение целевой функции $L_{\max} = 21$. Суточный запас сырья *A* (24 т) и *B* (6 т) исчерпывается полностью.



Книга1.xlsx *

	A	B	C
1	x1 =	3	
2	x2 =	1,5	
3	c1 =	5	
4	c2 =	4	
5	расход сырья *A*	24	
6	расход сырья *B*	6	
7	разность x2 - x1	-1,5	
8	цел. ф-ция *L* =	21	
9			
10			

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗЛП СИМПЛЕКС_МЕТОДОМ

П р и м е р . Найти наибольшее значение целевой функции *z* при заданных ограничениях:

$$Z = 6 \cdot x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 3 \cdot x_1 - x_2 \geq 9 \\ 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \leq 50 \\ -x_1 + 4 \cdot x_2 \geq 18 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Исходную стандартную задачу линейного программирования (СЗЛП) приведем к каноническому виду (КЗЛП). Для этого введем дополнительные переменные, учитывая знаки неравенств-ограничений. Если ограничение-неравенство имеет знак «≥», то дополнительную переменную вводим со знаком «-», в противном случае – со знаком «+».

СЗЛП **КЗЛП**

$$Z = 6 \cdot x_1 + x_2 \to \max \qquad Z = 6 \cdot x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 3 \cdot x_1 - x_2 \geq 9 \\ 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \leq 50 \\ -x_1 + 4 \cdot x_2 \geq 18 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3 \cdot x_1 - x_2 - x_3 = 9 \\ 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + x_4 = 50 \\ -x_1 + 4 \cdot x_2 - x_5 = 18 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \qquad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

В качестве базисных переменных удобно выбрать x_3, x_4, x_5, так как относительно этих переменных легко решить систему линейных уравнений: $\{x_3, x_4, x_5\}$ - базисные переменные; $\{x_1, x_2\}$ - свободные переменные.

$$Z = 6 \cdot x_1 + x_2$$
$$x_3 = -9 + 3 \cdot x_1 - x_2$$
$$x_4 = 50 - 2 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2$$
$$x_5 = -18 - x_1 + 4 \cdot x_2$$

Составим первую симплекс-таблицу: свободные члены записываем без изменения знаков, а коэффициенты при свободных переменных – с противоположными знаками.

Базисные переменные	**Свободные члены**	**Свободные переменные**	
		x1	**x2**
x3	-9	-3	1
x4	50	2	3
x5	-18	1	-4
Z	0	-6	-1

Базисное решение $X = \{0,\ 0,\ -9,\ 50,\ -18\}$ - недопустимое, т.к. имеются отрицательные элементы ($x_3 < 0, x_5 < 0$). Ограничения совместны, т.к. в строках с отрицательными свободными членами имеются ещё отрицательные элементы. Необходимо найти разрешающий элемент и провести преобразование симплекс-таблицы.

Найдём разрешающий элемент. Выберем наименьший отрицательный элемент в строках с отрицательными свободными членами. Это *-4*. Столбец, в котором находится этот элемент (x_2), принимаем в качестве разрешающего столбца (помечен стрелкой).

Для нахождения разрешающей строки определяем минимальное положительное отношение свободных членов к элементам разрешающего столбца. Так как $\min\{\frac{50}{3}, \frac{-18}{-4}\} = \frac{-18}{-4} = 4{,}5$, то в качестве разрешающей строки получаем x_5.

Элемент, находящийся на пересечении разрешающих столбца и строки, является разрешающим элементом (выделен рамкой). Он указывает, что базисную переменную x_5 переводим в свободные, а свободную переменную x_2 - в базисные.

Преобразуем симплекс-таблицу, используя правила преобразования:

1. Ячейку разрешающего элемента, равного «-4», заполняем значением, обратным значению разрешающего элемента (-1/4=-0,25).

2. Ячейки разрешающей строки x_5 заполняем элементами, стоящими в этих ячейках, деленными на разрешающий элемент «-4». Например, элемент, находящийся на пересечении столбца свободных членов и строки x_5, будет равен $\frac{-18}{-4} = 4\frac{1}{2}$.

3. Ячейки разрешающего столбца заполняем элементами, стоящими в этих ячейках, деленными на разрешающий элемент с обратным знаком «4». В частности, элемент, находящийся на пересечении столбца x_2 и строки x_4, будет равен $\frac{3}{4}$.

4. Остальные ячейки заполняем значениями, стоящими в этих ячейках, минус произведение элементов, стоящих в соответствующем разрешающем столбце и в соответствующей разрешающей строке, деленное на разрешающий элемент «-4». Например, элемент, находящийся на пересечении столбца свободных членов и строки x_3, будет равен $-9 - \frac{1 \times (-18)}{-4} = -13\frac{1}{2}$.

В результате преобразования симплекс-таблицы получим:

Базисные переменные	**Свободные члены**	**Свободные переменные**	
		x1	**x5**
x3	$-13\frac{1}{2}$	$-2\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$
x4	$36\frac{1}{2}$	$2\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$
x2	$4\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
Z	$4\frac{1}{2}$	$-6\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$

Базисное решение $X = \{0;\ 4\frac{1}{2};\ -13\frac{1}{2};\ 36\frac{1}{2};\ 0\}$ - недопустимое, т.к. есть отрицательный элемент ($x_3 < 0$). Ограничения совместны, т.к. в строке с отрицательным свободным членом имеется ещё отрицательный элемент.

В качестве разрешающего столбца выбираем столбец x_1. Вычисляя $\min\{\frac{-13\frac{1}{2}}{-2\frac{3}{4}}, \frac{36\frac{1}{2}}{2\frac{3}{4}}\} = \frac{-13\frac{1}{2}}{-2\frac{3}{4}} \approx 4{,}9$, получаем, что в качестве разрешающей строки следует выбрать x_3. Базисную переменную x_3 переводим в свободные, а свободную переменную x_1 - в базисные.

В результате преобразования симплекс-таблицы получили следующую таблицу:

Базисные переменные	**Свободные члены**	**Свободные переменные**	
		x3	**x5**

x1	$4\frac{10}{11}$	$-\frac{4}{11}$	$-\frac{1}{11}$
x4	23	1	1
x2	$5\frac{8}{11}$	$-\frac{1}{11}$	$-\frac{3}{11}$
Z	$35\frac{2}{11}$	$-2\frac{3}{11}$	$-\frac{9}{11}$

Базисное решение $X=(4\frac{10}{11};\ 5\frac{8}{11};\ 0;\ 23;\ 0)$ - допустимое, т.к. все свободные члены положительные. Решение оптимальное (минимум целевой функции), поскольку в строке целевой функции, кроме столбца свободных членов, все элементы одного знака (отрицательные). Оптимальное решение единственное, т.к. в строке целевой функции нет нулевых элементов. Данная симплекс-таблица соответствует точке А на рис.6.

Но поскольку требуется найти максимальное значение целевой функции, то итерации продолжаются.

В качестве разрешающего столбца можно выбрать любой столбец таблицы, т.к. они оба не удовлетворяют признаку оптимальности (максимуму). Выбираем столбец x_3. Тогда разрешающей строкой будет строка x_4, т.к. $\min\{\frac{23}{1}\}=23$.

В результате преобразований получим следующую симплекс-таблицу:

Таб.3. Симплекс-таблица оптимального решения **Базисные переменные**	**Свободные члены**	**Свободные переменные**	
		x4	**x5**
x1	$13\frac{3}{11}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{3}{11}$
x3	23	1	1
x2	$7\frac{9}{11}$	$\frac{1}{11}$	$-\frac{2}{11}$
Z	$87\frac{5}{11}$	$2\frac{3}{11}$	$1\frac{5}{11}$

Базисное решение $X=(13\frac{3}{11};\ 7\frac{9}{11};\ 23;\ 0;\ 0)$ - допустимое, т.к. все свободные члены положительные. Решение оптимальное (максимум целевой функции), поскольку в строке целевой функции все элементы одного знака (положительные). Оптимальное решение единственное, т.к. в строке целевой функции нет нулевых элементов. Данная симплекс-таблица соответствует точке С на рис.6.

Таким образом, наибольшее значение $Z_{\max}=87\frac{5}{11}$ целевая функция имеет при $X^*=(13\frac{3}{11};\ 7\frac{9}{11};\ 23;\ 0;\ 0)$.